

動的な Hardy 型ポテンシャルを伴う熱方程式の解の構造

柳田英二（明治大学/東京大学）

MIMS/CMMA 『現象数理学入門』レクチャーシリーズ (2025)

（総合数理学部講演会との合同開催）

明治大学中野キャンパス，2025 年 11 月 10 日（月），11 月 17 日（月）

- Hardy ポテンシャル（逆 2 乗ポテンシャル）を伴う方程式

(楕円形)
$$\Delta u + \frac{\lambda}{|x|^2} u = 0$$

シュレディンガー方程式

Hardy の不等式:
$$\frac{(N-2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx$$

(放物型)
$$u_t = \Delta u + \frac{\lambda}{|x|^2} u$$

藤田方程式 $u_t = \Delta u + u^p$ の特異解での線形化
ブラウン運動の自己相似性

- 動的な特異ポテンシャルを伴う熱方程式

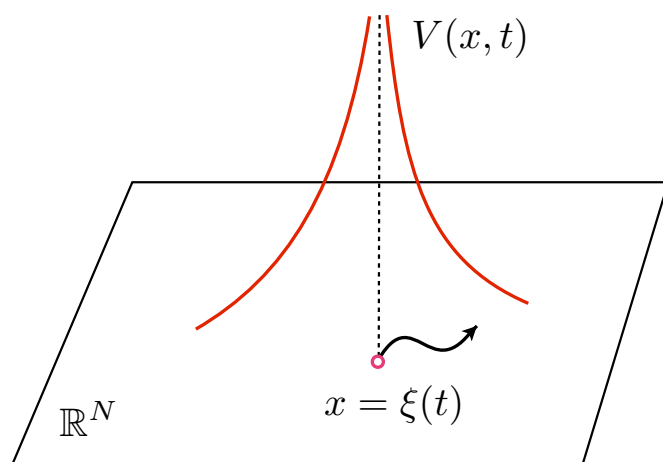
$$u_t = \Delta u + V(x, t)u, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{\xi(t)\}.$$

ポテンシャル V は特異点 $\xi(t)$ を持つと仮定する.

$$V(x, t) \rightarrow \infty \quad \text{as } x \rightarrow \xi(t)$$

例えば

$$V(x, t) = \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^\mu}, \quad \lambda, \mu > 0.$$



講演内容：

1. 静的な特異性 $V = \frac{\lambda}{|x|^2}$

P. Baras and J. A. Goldstein, The heat equation with a singular potential, Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984), 121–139.

2. 動的な特異性 $V = V(x, t) \rightarrow \infty \ (x \rightarrow \xi(t))$

J.-L. Chern, G. Hwang, J. Takahashi and E. Yanagida, On the evolution equation with a dynamic Hardy-type potential, J. Evol. Equ. 21 (2021), 2141–2165.

3. 解の特異性の分類 $V = \frac{\lambda(t)}{|x - \xi(t)|^2}$

J. Takahashi and E. Yanagida, Asymptotic profiles of solutions for a diffusion equation with a dynamic Hardy potential, submitted.

4. $\xi(t)$ の速い動き $V = \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^\mu}$

I. Okada and E. Yanagida, Probabilistic approach to the heat equation with a dynamic Hardy-type potential, Stochastic Process. Appl. 145 (2022), 204–225.

- ・ 正值解の存在

特異性が強すぎると正值解は存在しない。

特異性が弱いと解は存在する。

初期値のクラス（初期値が大きすぎると解は存在しない。）

パラメータ等の臨界値

- ・ 特異点近傍での解の形状

特異性の強さ

漸近的球対称性

分類

1 静的な特異性

1.1 Hardy ポテンシャルを伴う楕円形方程式

$$(E) \quad \Delta u + \frac{\lambda}{|x|^2} u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

・球対称解

$N > 2$ と仮定し, $u(r) = r^{-\alpha}$, $r := |x|$ とおいて代入すると

$$\begin{aligned} \Delta u + \frac{\lambda}{|x|^2} u &= u_{rr} + \frac{N-1}{r} u_r + \frac{\lambda}{r^2} u \\ &= \{\alpha^2 - (N-2)\alpha + \lambda\} r^{-\alpha-2}. \end{aligned}$$

したがって

$$\alpha^2 - (N-2)\alpha + \lambda = 0$$

... オイラー型常微分方程式の特性方程式
のとき, $u(r) = r^{-\alpha}$ は (E) をみたす.

・劣臨界の場合: $\lambda < \lambda_c = \frac{(N-2)^2}{4}$

特性方程式は2つの実解

$$0 < \alpha_1(\lambda) < \frac{N-2}{2} < \alpha_2(\lambda) < N-2$$

を持ち, したがって (E) には独立な2つの解

$$u = C|x|^{-\alpha_1} \quad (\text{弱い特異性を持つ解})$$

$$u = C|x|^{-\alpha_2} \quad (\text{強い特異性を持つ解})$$

が存在する.

・超臨界の場合: $\lambda > \lambda_c = \frac{(N-2)^2}{4}$

(E) には正值解は存在しない.

1.2 Hardy ポテンシャルを伴う熱方程式

$$(P) \quad u_t = \Delta u + \frac{\lambda}{|x|^2} u, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \quad N \geq 3.$$

P. Baras and J. A. Goldstein, The heat equation with a singular potential, Trans. Amer. Math. Soc. 284 (1984).

$\lambda_c := \frac{(N-2)^2}{4}$ が正値解が存在するための臨界値であることを示した.

定理 1.1 (Baras-Goldstein)

- (i) $\lambda < \lambda_c$ ならば正値大域解が存在する.
- (ii) $\lambda > \lambda_c$ ならば正値解は存在しない.

... 証明はエネルギー法と Feynman-Kac の公式による.

Baras-Goldstein は

- 初期値問題の可解性
- 特異性の評価 (解の上と下からの評価)

にてについても調べた. その後, 静的な特異ポテンシャルの場合について, 多くの関連する研究がある.

2 動的な特異性

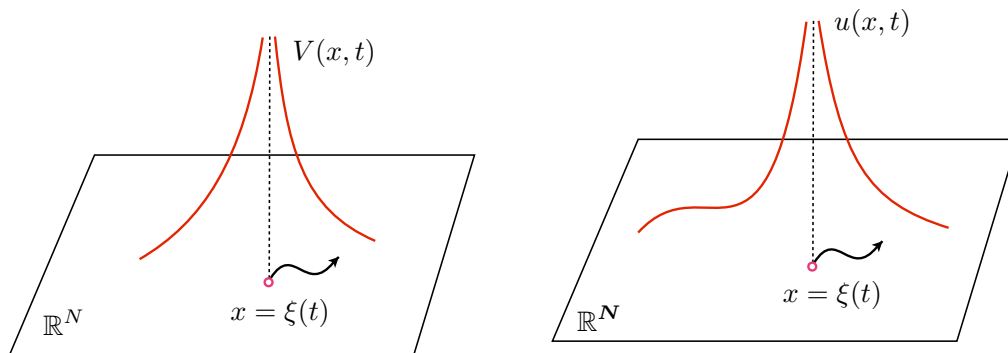
2.1 問題設定

問題

特異点 $\xi(t)$ が時間とともに動くようになるか？

[動的な特異ポテンシャルを伴う熱方程式]

$$u_t = \Delta u + V(x, t)u, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus \{\xi(t)\}$$



$\xi(t)$ が動くと、ポテンシャル $V(x, t)$ と解 $u(x, t)$ の相互作用は弱くなる。

$$u_t = \Delta u + V(x, t)u(x, t)$$

基本的な仮定

- $V(x, t)$ は $x \neq \xi(t)$ について非負かつ連続で、 $|x| > 1$ に対して有界。
- $V(x, t) \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow \xi(t)$).
- $\xi(t)$ は $t \geq 0$ について指数 $\gamma > 1/2$ でヘルダー連続：

$$|\xi(t) - \xi(s)| \leq C|t - s|^\gamma, \quad t, s \geq 0.$$

2.2 初期値問題

$$(IVP) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + V(x, t)u, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \{\xi(t)\}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \{\xi(0)\}. \end{cases}$$

(以下では x, t の範囲を省略し, 特別な制限のある場合のみ明記する.)

初期値に対する仮定

- $u_0(x)$ は $x \neq \xi(t)$ について非負かつ連続
- $u_0(x)$ は $|x - \xi(0)| > 1$ に対して有界

定義. 最小解 (Minimal solution, Proper solution)

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, V を有界な関数

$$V_n(x, t) := \min\{V(x, t), n\}.$$

で近似する. このとき, 次の初期値問題には一意的な解が存在する.

$$\begin{cases} u_t(x, t) = \Delta u(x, t) + V_n(x, t)u, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \end{cases}$$

この近似解を $u_n(x, t)$ とし, もし

$$u(x, t) := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t), \quad x \neq \xi(t),$$

が存在すれば, $u(x, t)$ は (IVP) の解となる. これを最小解という.

最小解が存在するためには $\{u_n\}$ が有界であればよい.

$\therefore$) 近似解の列 $\{u_n\}$ は n について単調増加

2.3 解の存在

$$(IVP) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + V(x, t)u, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \end{cases}$$

の最小解について以下が成り立つ.

定理 2.1 (最小解の存在)

V はある $0 < \lambda < \lambda_c$ と $R > 0$ に対して

$$V(x, t) \leq \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^2}, \quad 0 < |x - \xi(0)| < R,$$

をみたすとする. もし初期値がある $k < \alpha_2(\lambda) + 2$ に対して

$$u_0(x) \leq C_1 |x - \xi(0)|^{-k}, \quad 0 < |x - \xi(0)| < R,$$

をみたせば, (IVP) には最小解が存在して

$$u(x, t) < C_2 |x - \xi(t)|^{-\alpha_1(\lambda) - \varepsilon}, \quad 0 < |x - \xi(t)| < R, \quad t > \delta,$$

をみたす. ただし, $\varepsilon, \delta > 0$ は任意で, $C_2 = C_2(\varepsilon, \delta)$ である.

2.4 定理 2.1 (最小解の存在) の証明

証明の方針

$$V(x, t) = \frac{\lambda + \varepsilon}{|x - \xi(t)|^2} \quad (\varepsilon > 0) \text{ の場合を考えれば十分である.}$$

($|x - \xi(t)| \geq R$ からの寄与は重要でない.)

STEP 1: 静的な特異性を持つ場合の特殊解を用意する.

STEP 2: (IVP) を等価な (特異点が動かない) 積分方程式に変換する.

STEP 3: 特殊解を用いて, 積分方程式から優解を構成する.

STEP 1: 静的な特異性 ($\xi(t) \equiv 0$) に対する特殊解

$$v_t = \Delta v + \frac{\lambda + \varepsilon}{|x|^2} v, \quad x \neq 0,$$

の球対称解 $v = v(r, t)$, $r = |x|$, は

$$v_t = v_{rr} + \frac{N-1}{r} v_r + \frac{\lambda + \varepsilon}{r^2} v, \quad r > 0.$$

をみたす.

補題 (前方自己相似解)

$0 < \lambda + \varepsilon < \lambda_c$, $0 < k < \alpha_2 + 2$ とすると, 初期値 $v(r, 0) = r^{-k}$ に対し, 最小解 (前方自己相似解)

$$v(r, t) = t^{-k/2} \varphi(t^{-1/2} r), \quad r > 0, t > 0,$$

が存在する. ただし $\varphi(\rho)$ は

$$\begin{cases} \varphi_{\rho\rho} + \frac{N-1}{\rho} \varphi_{\rho} + \frac{\rho}{2} \varphi_{\rho} + \frac{k}{2} \varphi + \frac{\lambda + \varepsilon}{\rho^2} \varphi = 0, & \rho > 0, \\ \rho^{\alpha_1(\lambda+\varepsilon)} \varphi(\rho) \rightarrow c_k > 0 & (\rho \rightarrow 0), \\ \rho^k \varphi(\rho) \rightarrow 1 < \infty & (\rho \rightarrow \infty), \end{cases}$$

をみたす.

STEP2: 積分方程式への変換

初期値問題

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + V(x, t)u, & u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

をそれと等価な積分方程式

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_{\mathbb{R}^N} G(x - y, t) u_0(y) dy \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} G(x - y, t - s) V(y, s) u(y, s) dy ds, \end{aligned}$$

に変換する．ただし G は熱核

$$G(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

である．

ここで $\tilde{u}(x, t) := u(x + \xi(t), t)$, $\tilde{V}(x, t) := V(x + \xi(t), t)$ とおくと, (特異点が動かない) 積分方程式

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) = & \int_{\mathbb{R}^N} G(x - y - \xi(t) + \xi(0), t) u_0(y - \xi(0)) dy \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} G(x - y - \xi(t) + \xi(s), t - s) \tilde{V}(y, s) \tilde{u}(y, s) dy ds, \end{aligned}$$

と書き換わる．($\xi(t)$ は微分可能とは限らないのでこうする.)

ここで, $\xi(t)$ のヘルダー連続性 (指数 $\gamma > 1/2$) より

$$|\xi(t) - \xi(s)| \leq C|t - s|^\gamma \ll |t - s|^{1/2}.$$

これより, $t - s > 0$ が小さければ

$$G(x - y - \xi(t) + \xi(s), t - s) \geq cG\left(x - y, \frac{t - s}{1 + \delta}\right)$$

が成り立つ．($c > 0$, $0 < \delta \ll 1$ は定数)

STEP3: 優解の構成

積分不等式

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, t) &\geq \int_{\mathbb{R}^N} cG\left(x - y, \frac{t}{1 + \delta}\right) u_0(y - \xi(0)) dy \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} cG\left(x - y, \frac{t - s}{1 + \delta}\right) \tilde{V}(y, s) \tilde{u}(y, s) dy ds \\ &=: \tilde{w}(x, t)\end{aligned}$$

より（グロンウォールの不等式と同様な方法で）

$$\tilde{w}_t \geq \frac{1}{1 + \delta} \Delta \tilde{w} + c \tilde{V} \tilde{u} = \frac{1}{1 + \delta} \Delta \tilde{w} + c \frac{\lambda + \varepsilon}{|y|^2} \tilde{w}$$

を得る．したがって $u^+(x, t) := c^{-1}v(x + \xi(t), (1 + \delta)^{-1}t)$ は

$$u_t^+ \geq \Delta u^+ + \frac{\lambda + \varepsilon}{|y - \xi(t)|^2} u^+$$

をみたす．

これより近似列 $\{u_n\}$ の上界が得られる． また自己相似解の定義から，
解の上からの評価が得られる． $\square$

2.5 最小解の特異性の評価

$$(IVP) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + V(x, t)u, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0. \end{cases}$$

定理 2.2 (特異性の下からの評価)

ある $0 < \lambda < \lambda_c$ と $R > 0$ に対して, ポテンシャル V が

$$V(x, t) \geq \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^2}, \quad 0 < |x - \xi(t)| < R$$

みたすとする. このとき, (IVP) の解は (もし存在すれば)

$$u(x, t) \geq C|x - \xi(t)|^{-\alpha_1(\lambda)+\varepsilon}, \quad 0 < |x - \xi(t)| < R, \quad t > \delta,$$

をみたす. ただし $\varepsilon, \delta > 0$ は任意で, $C = C(\varepsilon, \delta)$ である.

証明は定理 2.1 の証明と同様に

STEP 1: 静的な場合の特殊解を用意する.

STEP 2: (IVP) を等価な積分方程式に変換する.

STEP 3: 特殊解を変形して劣解を構成する.

2.6 大きな初期値に対する解の非存在

$$(IVP) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + V(x, t)u, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0. \end{cases}$$

初期値に対する条件 $k < \alpha_2 + 2$ は解の存在に対して本質的である。

定理 2.3 (大きな初期値に対する解の非存在)

ある $0 < \lambda < \lambda_c$ と $R > 0$ に対して

$$V(x, t) \geq \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^2}, \quad |x - \xi(t)| < R$$

が成り立つと仮定する。このとき、もしある $k > \alpha_2(\lambda) + 2$ に対して、初期値が

$$u_0(x) \geq C|x - \xi(0)|^{-k}, \quad |x - \xi(0)| < R$$

をみたせば (IVP) に解は存在しない。

証明．初期値に対する仮定を用いると

$$\begin{aligned} I[u] &:= \int_{\mathbb{R}^N} G(x, y, t) u_0(y) dy \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} G(x, y, t-s) V(y, s) u(y, s) dy ds \end{aligned}$$

に対して $I[u] > u$ が $|x - \xi(0)| < R$ で成り立つ。したがって $I[u]$ には不動点は存在しないので、解は存在しない。

系 (解の特異性の上からの評価)

定理 2.3 と同じ V に対する仮定のもとで、(IVP) の解は

$$u(x, t) < C|x - \xi(0)|^{-\alpha_2(\lambda)-2-\varepsilon}, \quad |x - \xi(0)| < R$$

をみたす。

2.7 一意性

$$(IVP) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + V(x, t)u, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0. \end{cases}$$

定理 2.4 (解の一意性)

ある $0 < \lambda < \lambda_c$ と $R > 0$ に対して,

$$0 \leq V(x, t) \leq \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^2}, \quad 0 < |x - \xi(t)| < R,$$

をみたすとする. このとき, (IVP) の 2 つの解 u_1, u_2 が

$$\begin{aligned} |u_1(x, t) - u_2(x, t)| &\leq C_0 |x - \xi(t)|^{-\alpha_2(\lambda) + \varepsilon}, \\ 0 < |x - \xi(t)| &< R, \quad t > 0 \end{aligned}$$

をみたせば, $u_1 \equiv u_2$ である.

証明は

C. Marchi, The Cauchy problem for the heat equation with a singular potential. Diff. Int. Eqs 16 (2003), 1065–1081.

の方法を修正する.

2.8 超臨界の場合

$$(IVP) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + V(x, t)u, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0. \end{cases}$$

定理 2.5 (超臨界における解の非存在)

ある $\lambda > \lambda_c$ と $R > 0$ に対して

$$V(x, t) > \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^2}, \quad |x - \xi(t)| < R$$

をみたせば、正值解は存在しない。

証明. 積分作用素

$$\begin{aligned} I[u] &:= \int_{\mathbb{R}^N} G(x - y, t) u_0(y) dy \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} G(x - y, t - s) V(y, s) u(y, s) dy ds. \end{aligned}$$

に不動点が存在しないことを示す..

STEP 1: λ を $\lambda_c - \varepsilon < \lambda < \lambda_c$ みたすようにとる. $\lambda \uparrow \lambda_c$ とすると $\alpha_1(\lambda) \uparrow (N - 2)/2$ である. したがって, 任意の超臨界方程式の解は

$$u(x, t) > C|x - \xi(t)|^{-(N-2)/2+\varepsilon}, \quad 0 < |x - \xi(t)| < 1.$$

をみたす.

STEP 2: もし U が

$$U(x, t) > |x - \xi(t)|^{-(N-2)/2+\varepsilon}, \quad 0 < |x - \xi(t)| < 1,$$

をみたせば, 直接的な計算により

$$I[U] > U(x, t), \quad 0 < |x - \xi(t)| < \delta,$$

となる. したがって $I[u]$ には不動点は存在しない. □

3 特異性の分類

この節では

$$(IVP) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{\lambda(t)}{|x - \xi(t)|^2} u, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \end{cases}$$

について考える．（以後, $\alpha_1 = \alpha_1(t), \alpha_2 = \alpha_2(t)$ と表記）

仮定

- $\xi(t)$ は $t \geq 0$ について指数 $\gamma > 1/2$ でヘルダー連続．
- $\lambda(t)$ は $t \geq 0$ について連続微分可能で $0 < \lambda(t) < \lambda_c$ をみたす．
- $u_0(x)$ は $x \neq \xi(0)$ について非負で連続, $|x - \xi(0)| > 1$ について有界で, ある $k < \alpha_2(\lambda) + 2$ と $R > 0$ に対して次をみたす．

$$u_0(x) \leq C_1 |x - \xi(0)|^{-k}, \quad 0 < |x - \xi(0)| < R.$$

前節の結果

(IVP) には正值解が存在して以下をみたす．

(i) 最小解は $0 < |x - \xi(t)| < R$ に対して

$$C_1 |x - \xi(t)|^{-\alpha_1(t)+\varepsilon} < u(x, t) \leq C_2 |x - \xi(t)|^{-\alpha_1(t)-\varepsilon}.$$

(ii) すべての解は $0 < |x - \xi(t)| < R$ に対して

$$C_1 |x - \xi(t)|^{-\alpha_1(t)+\varepsilon} \leq u(x, t) \leq C_2 |x - \xi(t)|^{-\alpha_2(t)-\varepsilon}.$$

(iii) 2つの解 u_1, u_2 が $0 < |x - \xi(t)| < R$ に対して

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq C_0 |x - \xi(t)|^{-\alpha_2(t)+\varepsilon}$$

をみたせば, $u_1 \equiv u_2$ ．

3.1 主結果

定理 3.1 (最小解の漸近形状)

初期値が

$$u_0(x) = |x - \xi(0)|^{-\alpha_1(0)} + O(|x - \xi(0)|^{-\alpha_1(0)}) \quad (x \rightarrow \xi(0))$$

をみたせば、定数 $C_1, C_2, \sigma, R > 0$ が存在し、 $0 < |x - \xi(t)| < R$ に対して

$$\begin{aligned} C_1 |x - \xi(t)|^{-\alpha_1(t)} |\log |x - \xi(t)||^{-\sigma} \\ \leq u(x, t) \leq C_2 |x - \xi(t)|^{-\alpha_1(t)} |\log |x - \xi(t)||^{\sigma}, \end{aligned}$$

が成り立つ.

定理 3.2 (非最小解の存在)

$h(t) \in C^1$ を与えられた正の関数とする. 初期値が

$$u_0(x) = h(0) |x - \xi(0)|^{-\alpha_2(0)} + h.o.t. \quad \text{as } x \rightarrow \xi(t)$$

をみたせば,

$$u(x, t) = h(t) |x - \xi(t)|^{-\alpha_2(t)} + h.o.t. \quad \text{as } x \rightarrow \xi(t)$$

をみたす解を持つ.

定理 3.3 (特異性の分類)

$\beta(t) > 0$ を $t \geq 0$ について連続な関数とする.

(i) ある定数 $C, R > 0$ に対して解は

$$0 < u(x, t) \leq C |x - \xi(t)|^{-\beta(t)}, \quad 0 < |x - \xi(t)| < R,$$

をみたすとき、もし $\beta(t) < \alpha_2(t)$ ならば、 u は最小解である.

(ii) ある定数 $C, R > 0$ に対して解が

$$u(x, t) \geq C |x - \xi(t)|^{-\beta(t)}, \quad 0 < |x - \xi(t)| < R,$$

をみたすとき、もし $\beta(t) > \alpha_1(t)$ ならば $\beta(t) \equiv \alpha_2(t)$ である.

3.2 準備

$$U(x, t) := N(N-2)|B| \int_{-1}^t G(x - \xi(s), t-s) ds, \quad x \in \mathbb{R}^N, t > -1.$$

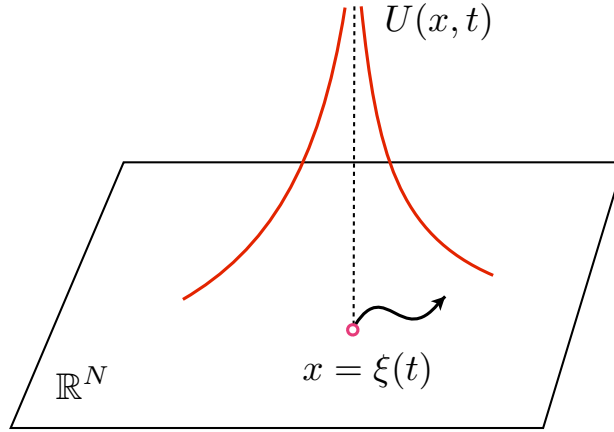
とおく. (ただし $|B|$ は N 次元球の体積) と定義すると, U は

$$U_t - \Delta U = \frac{1}{N(N-2)|B|} \delta(x - \xi(t)),$$

$$U(x, t) = |x - \xi(t)|^{2-N} + h.o.t. \quad (x \rightarrow \xi(t)), t > -1.$$

$$\nabla U(x, t) = \nabla |x - \xi(t)|^{2-N} + h.o.t.$$

をみます.



U には $\xi(t)$ の動きが特異点の高次項に非対称性として織り込まれる.

補題 (熱方程式の特異解)

ある定数 $C, R > 0$ が存在し, $0 < |x - \xi(t)| < R$ に対して

$$\begin{aligned} & |U(x, t) - |x - \xi(t)|^{2-N}| \\ & \leq C|x - \xi(t)|^{1+2\gamma-N} \log \left(e + \frac{1}{|x - \xi(t)|} \right), \\ & |\nabla U(x, t) + (N-2)|x - \xi(t)|^{-N}(x - \xi(t))| \leq C|x - \xi(t)|^{2\gamma-N} \end{aligned}$$

が成り立つ.

補題

$u(x, t) = U(x, t)^{\frac{\alpha_1(t)}{N-2}}$ は方程式の近似解である.

$$\begin{aligned}
 u_t - \Delta u - \frac{\lambda(t)}{|x - \xi(t)|^2} u &= \left(\frac{\alpha_1(t)}{N-2} \right) U(x, t)^{\frac{\alpha_1(t)}{N-2}-1} \mathbf{U}_t + \frac{\alpha_1'(t)}{N-2} U(x, t)^{\frac{\alpha_1(t)}{N-2}} \log U \\
 &- \left(\frac{\alpha_1(t)}{N-2} \right) U(x, t)^{\frac{\alpha_1(t)}{N-2}-1} \mathbf{\Delta U} - \left(\frac{\alpha_1(t)}{N-2} \right) \left(\frac{\alpha_1(t)}{N-2} - 1 \right) U(x, t)^{\frac{\alpha_1(t)}{N-2}-2} |\nabla U|^2 \\
 &- \frac{\lambda(t)}{|x - \xi(t)|^2} U(x, t)^{\frac{\alpha_1(t)}{N-2}}.
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 U(x, t) &= |x - \xi(t)|^{2-N} + h.o.t., \\
 \nabla U(x, t) &= \nabla |x - \xi(t)|^{2-N} + h.o.t. \\
 &= (N-2)|x - \xi(t)|^{-N}(x - \xi(t)) + h.o.t.,
 \end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
 &- \left(\frac{\alpha_1(t)}{N-2} \right) \left(\frac{\alpha_1(t)}{N-2} - 1 \right) U(x, t)^{\frac{\alpha_1(t)}{N-2}-2} |\nabla U|^2 \\
 &= -\alpha_1(t)(\alpha_1(t) - N + 2) |x - \xi(t)|^{\frac{\alpha_1(t)}{N-2}-2}, \\
 &- \frac{\lambda(t)}{|x - \xi(t)|^2} U(x, t)^{\frac{\alpha_1(t)}{N-2}} = -\lambda(t) |x - \xi(t)|^{\frac{\alpha_1(t)}{N-2}-2}.
 \end{aligned}$$

さらに, $\alpha_1(t)$ は特性方程式

$$\alpha^2 - (N-2)\alpha + \lambda(t) = 0$$

の根である. 以上より $u(x, t) = U(x, t)^{-\frac{\alpha_1(t)}{N-2}}$ は

$$u_t - \Delta u - \frac{\lambda(t)}{|x - \xi(t)|^2} = o(|x - \xi(t)|^{-\frac{\alpha_1(t)}{N-2}-2}) = o(|x - \xi(t)|^{-2}u)$$

をみたすので, 方程式の近似解である. □

3.3 最小解の特異性

定理 3.1 (最小解の漸近形状)

初期値が

$$u_0(x) = |x - \xi(0)|^{-\alpha_1(0)} + O(|x - \xi(0)|^{-\alpha_1(0)}) \quad (x \rightarrow \xi(0))$$

をみたせば、任意の $0 < \sigma < 1$ に対して $C_1, C_2, R > 0$ が存在して

$$\begin{aligned} C_1 |x - \xi(t)|^{-\alpha_1(t)} |\log |x - \xi(t)||^{-\sigma} \\ \leq u(x, t) \leq C_2 |x - \xi(t)|^{-\alpha_1(t)} |\log |x - \xi(t)||^{\sigma}, \\ 0 < |x - \xi(t)| < R, \end{aligned}$$

が成り立つ.

注. 最小解が漸近的球対称性を持つかどうかは不明.

作用素 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L}\varphi := \varphi_t - \Delta\varphi - V\varphi.$$

と定義する.

$\rho \in (0, \rho_0)$ に対してカットオフ関数 $\eta_\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, T])$ を

$$\begin{aligned} \eta_\rho(x, t) &= 0 & \text{if } 0 \leq |x - \xi(t)| \leq \rho/2, \\ 0 < \eta_\rho(x, t) < 1 & \text{if } \rho/2 < |x - \xi(t)| < \rho, \\ \eta_\rho(x, t) &= 1 & \text{if } |x - \xi(t)| \geq \rho, \end{aligned}$$

で定義し,

$$u^\pm(x, t) := C_0^{\pm 1} \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)^{\frac{\alpha_1(t)}{N-2}} \{\log(e + U(x, t))\}^{\pm\sigma} \pm be^{\theta t} \eta_\rho(x, t)$$

とおく. ただし $0 < \sigma < 1$, $C_0 > 0$, $b, \theta > 0$ は定数である.

補題 (優解と劣解)

ある定数 $\theta > 0$, $b > 1$ に対して, $u^\pm$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u^+ &\geq 0, & \mathcal{L}u^- &\leq 0, \\ u^-(\cdot, 0) &\leq u_0 \leq u^+(\cdot, 0), \end{aligned}$$

をみたす.

定理 3.1（最小解の漸近形状）の証明

$$u^\pm(x, t) := C_0^{\pm 1} U(x, t)^{\frac{\alpha_1(t)}{N-2}} \{\log(e + U(x, t))\}^{\pm \sigma} \pm b e^{\theta t} \eta_\rho(x, t)$$

は優解と劣解であるから、比較原理より、

$$u^-(x, t) \leq u(x, t) \leq u^+(x, t),$$

をみたす解が存在する．ここで U の評価から

$$u^\pm(x, t) = (C_0^{\pm 1} + o(1)) |x - \xi(t)|^{-\alpha_1(t)} \{\log(e + U(x, t))\}^{\pm \sigma} \quad (x \rightarrow \xi(t))$$

が成り立つ．したがって、ある定数 $C_1, C_2, \sigma, R > 0$ に対して、解は

$$\begin{aligned} C_1 |x - \xi(t)|^{-\alpha_1(t)} |\log |x - \xi(t)||^{-\sigma} &\leq u(x, t) \\ &\leq C_2 |x - \xi(t)|^{-\alpha_1(t)} |\log |x - \xi(t)||^\sigma, \\ 0 &< |x - \xi(t)| < R, \end{aligned}$$

をみたす．

また一意性と最小解の評価より、この解は最小解である．

□

3.4 非最小解

定理 3.2 (非最小解の存在)

$h(t) \in C^1$ を与えられた正の関数とする．初期値が

$$u_0(x) = h(0)|x - \xi(0)|^{-\alpha_2(0)} + h.o.t. \quad (x \rightarrow \xi(t))$$

をみたせば,

$$u(x, t) = h(t)|x - \xi(t)|^{-\alpha_2(t)} + h.o.t. \quad (x \rightarrow \xi(t))$$

をみたす解を持つ．

注 1. この解は漸近的球対称性を持っている．

注 2. この解は任意の時刻 $\tau > 0$ において、最小解へと遷移できる．
すなわち

$$u(x, t) = \begin{cases} k(t)|x - \xi(t)|^{-\alpha_2(t)} + h.o.t., & t \in [0, \tau], \\ O(|x - \xi(t)|^{-\alpha_1(t)-\varepsilon}), & t \in (\tau, T], \end{cases}$$

をみたす解が存在する．

関数 u^+ と u^- を

$$u^\pm(x, t) := k(t)U(x, t)^{\frac{\alpha_2(t)}{N-2}} \pm U(x, t)^{\frac{\alpha_2(t)-\varepsilon}{N-2}} \pm be^{\theta t}\eta_\rho(x, t),$$

で定義する.

補題 (優解と劣解)

ある定数 $\theta > 0, b > 1$ に対して, u^+ と u^- は

$$\begin{aligned}\mathcal{L}u^+ &\geq 0, & \mathcal{L}u^- &\leq 0, \\ u^-(\cdot, 0) &\leq u_0 \leq u^+(\cdot, 0),\end{aligned}$$

をみたす.

定理 3.2 (非最小解の存在) の証明

$u^\pm(x, t)$ を上のように定めると, 比較原理より,

$$u^-(x, t) \leq u(x, t) \leq u^+(x, t)$$

をみたす解が存在する. ここで U の評価から

$$\left| u(x, t) - k(t)U(x, t)^{\frac{\alpha_2(t)}{N-2}} \right| = O(U(x, t)^{\frac{\alpha_2(t)-\varepsilon}{N-2}}) \quad (x \rightarrow \xi(t))$$

が成り立つ. したがって

$$u(x, t) = k(t)|x - \xi(t)|^{-\alpha_2(t)} + O(|x - \xi(t)|^{-\alpha_2(t)+\varepsilon'}) \quad (x \rightarrow \xi(t))$$

を得る. □

3.5 特異性の分類

定理 3.3 (特異性の分類)

$\beta(t) > 0$ を $t \geq 0$ について連続な関数とする.

(i) ある定数 $C, R > 0$ に対して解が

$$0 < u(x, t) \leq C|x - \xi(t)|^{-\beta(t)}, \quad 0 < |x - \xi(t)| < R,$$

をみたすとき, もし $\beta(t) < \alpha_2(t)$ ならば, u は最小解である.

(ii) ある定数 $C, R > 0$ に対して解が

$$u(x, t) \geq C|x - \xi(t)|^{-\beta(t)}, \quad 0 < |x - \xi(t)| < R,$$

をみたすとき, もし $\beta(t) > \alpha_1(t)$ for $t > 0$ ならば $\beta(t) \equiv \alpha_2(t)$ である.

証明. $R > 0$ を十分小さくとり,

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x-y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} G(x-y, t-s) V(y, s) u(y, s) dy ds$$

を用いる.

(i) 解がある $0 < t_1 < t_2$ と $\alpha_2(t) < \beta_0 < \beta(t)$ に対して

$$u(x, t) \geq |x - \xi(t)|^{-\beta_0}, \quad 0 < |x - \xi(t)| < R, \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

ならば

$$u(x, t) \geq (1 + \varepsilon) |x - \xi(t)|^{-\beta_0}, \quad 0 < |x - \xi(t)| < R, \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

これを繰り返すと $u(x, t) > (1 + \varepsilon)^n |x - \xi(t)|^{-\beta_0} \rightarrow \infty$ となり矛盾.

(ii) 解がある $t_0 > 0$ と $\alpha_1(t) < \beta_0 < \alpha_2(t)$ に対して

$$u(x, t) \geq |x - \xi(t)|^{-\beta_0}, \quad 0 < |x - \xi(t)| < R, \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

ならば

$$u(x, t) < (1 - \varepsilon)^k |x - \xi(t)|^{-\beta_0}, \quad 0 < |x - \xi(t)| < R, \quad t_1 \leq t \leq t_2.$$

これを繰り返すと $u(x, t) < (1 - \varepsilon)^n |x - \xi(t)|^{-\beta_0} \rightarrow 0$ となり矛盾. $\square$

まとめ.

- ・ 動的特異性を持つポテンシャル $V(x, t)$ に対し, 正值解が存在するための条件を明らかにし, 解の評価を与えた.

- ・ 特に, $V(x, t) = \frac{\lambda(t)}{|x - \xi(t)|^2}$ の場合について, 解の漸近的形状と, 特異性の強さにより 2 種類に分類されることを明らかにした.

- ・ 以上の結論において, $\xi(t)$ のヘルダー指数が $\gamma > 1/2$ をみたすこと, $0 < \lambda < \lambda_c$ をみたすことが本質的であることを示した.

- ・ 来週は, $\gamma < 1/2$, $V(x, t) = \frac{\lambda(t)}{|x - \xi(t)|^\mu}$ ($\mu > 2$) の場合を扱う.

4 Quick motion of $\xi(t)$

4.1 Formulation

In this section, we consider the potential

$$V = \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^\mu},$$

where $\xi(t)$ is γ -Hölder continuous.

Consider

$$(IVP) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^\mu} u, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \end{cases}$$

where $u_0(x) \geq 0, \not\equiv 0$ is continuous and bounded on $\mathbb{R}^N$.

Solvability of (IVP)

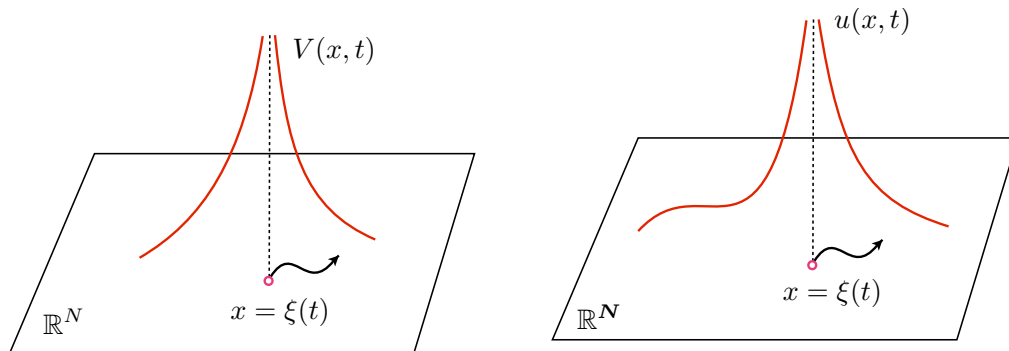
If $\mu = 2$ and $\gamma > 1/2$, then the following holds:

- (i) If $\lambda > \lambda_c = (N - 2)^2/4$, there exists no positive solution of (IVP).
- (ii) If $\lambda < \lambda_c = (N - 2)^2/4$, there exists a positive solution of (IVP).

Question

What happens if $0 < \gamma < 1/2$?

If $\xi(t)$ moves more quickly, the interaction of the potential $V(x, t)$ and the solution $u(x, t)$ becomes weaker.



4.2 Affected area of diffusion

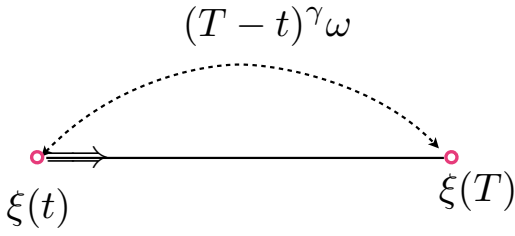
Kan-Takahashi (2014) studied the equation

$$u_t = \Delta u + \delta(x - \xi(t)), \quad u(x, 0) = 0,$$

by assuming that

$$\omega := \lim_{t \uparrow T} \frac{\xi(T) - \xi(t)}{(T - t)^\gamma} \neq 0$$

exists for some $0 < \gamma < 1$.



$$|\xi_t(t)| \simeq \gamma(T - t)^{\gamma-1}|\omega| \rightarrow \infty \quad (t \uparrow T)$$

Kan-Takahashi (2014)

(i) if $\gamma > 1/2$, then $u(x, T)$ is asymptotically radially symmetric.

(ii) if $0 < \gamma < 1/2$, then $u(x, T)$ is NOT asymptotically radially symmetric,

as $x \rightarrow \xi(T)$.

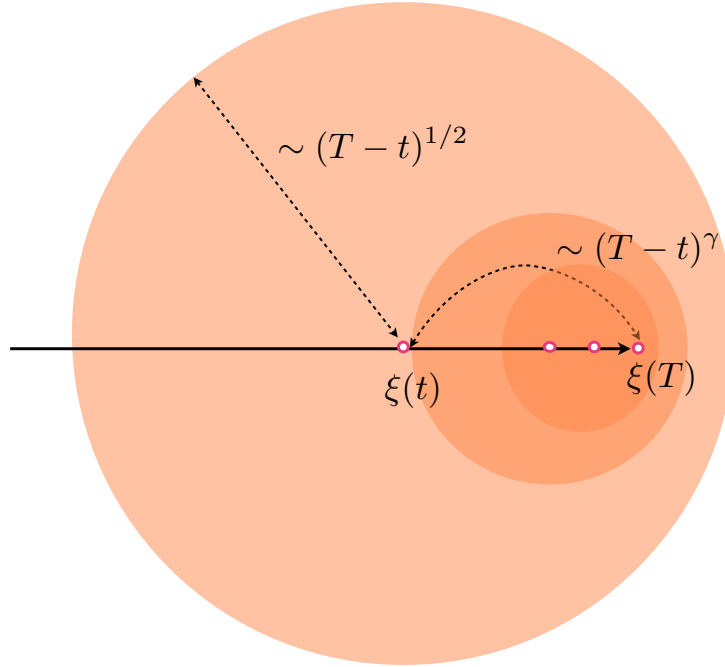
By

$$G(x, \xi(s), t) = \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x - \xi(s)|^2}{4(t-s)}\right),$$

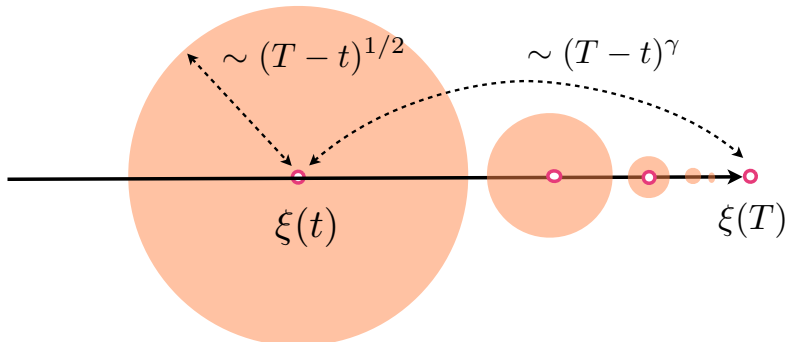
The influence of $\delta(x - \xi(t))$ to $\xi(T)$ is

$$\begin{cases} \text{big} & \text{if } 0 < |x - \xi(s)| \ll 2(t-s)^{1/2}, \\ \text{small} & \text{if } 2(t-s)^{1/2} \ll |x - \xi(s)| < \infty. \end{cases}$$

The case $1/2 < \gamma < 1$:



The case $0 < \gamma < 1/2$:



4.3 Main result

$$(IVP) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^\mu} u, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \end{cases}$$

where $u_0(x) \geq 0$, $\not\equiv 0$ is continuous and bounded on $\mathbb{R}^N$.

Assume that $\xi(t)$ is γ -Hölder continuous ($0 < \gamma < 1/2$) almost everywhere:

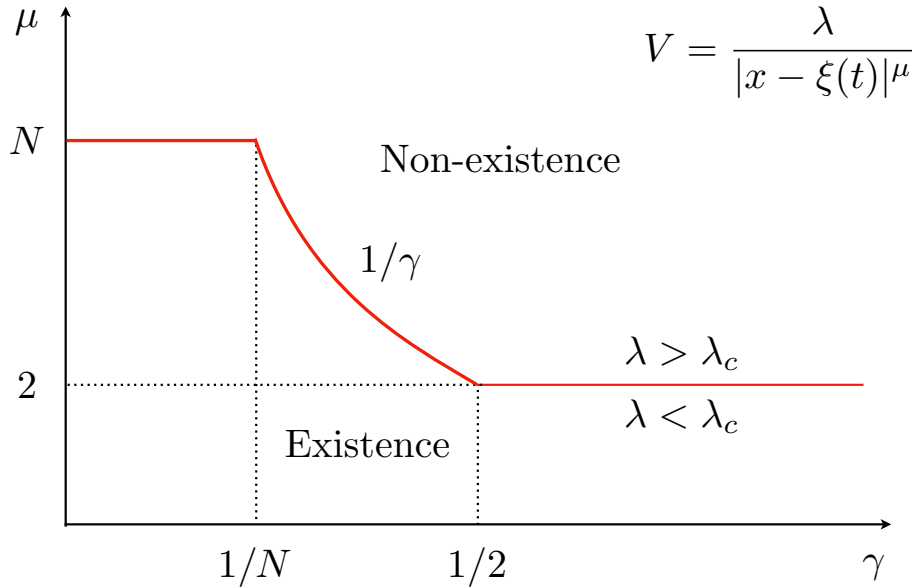
$$|\xi(t) - \xi(s)| > C|x - s|^\gamma, \quad 0 \leq s < t.$$

Define

$$\mu_c := \min \{1/\gamma, N\}.$$

Solvability of (IVP)

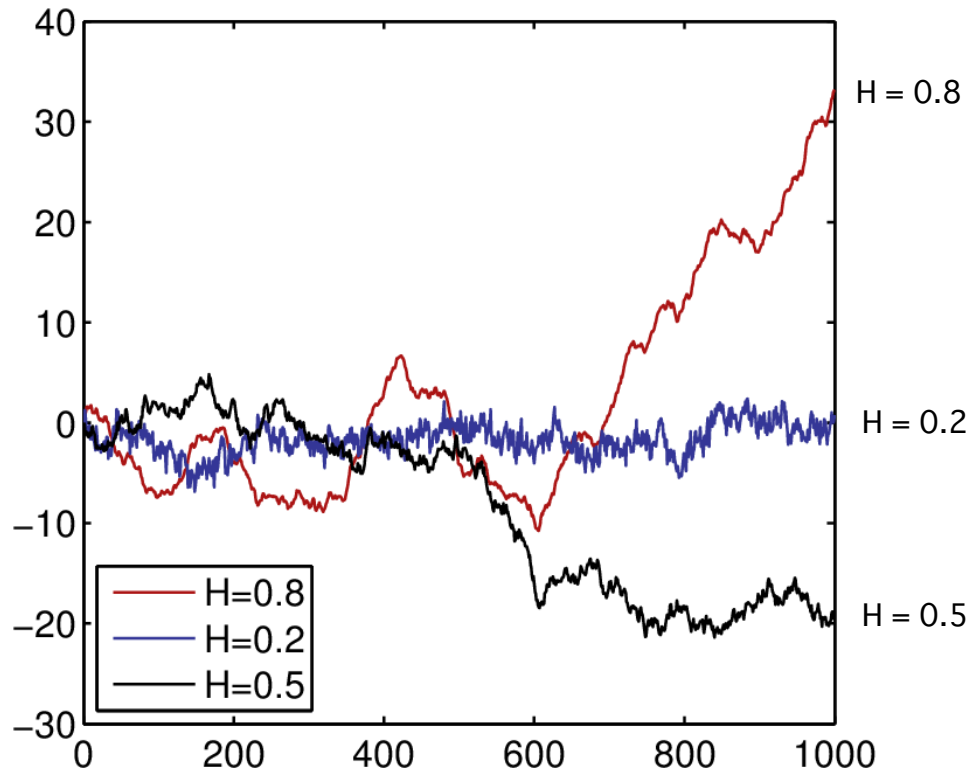
- (i) If $\mu > \mu_c$, then there exists no positive solution of (IVP).
- (ii) If $0 < \mu < \mu_c$, then there exists a positive solution that is bounded in $x \in \mathbb{R}^N$ for every $t > 0$.



Remark. If $\mu \geq N$, then $|x - \xi(t)|^{-\mu} \notin L^1_{local}$, so there is no solution.

4.4 Fractional Brownian Motion (FBM)

Assume that $\xi(t)$ is a sample path of Fractional Brownian motion with the Hurst exponent H .



1-D fractional Brownian motion with the Hurst exponent H .

Examples of the fractional Brownian motion

- Widths of consecutive annual rings of a tree
- Values of the log returns of a stock
- Level of water in a river as a function of time
- Characters of solar activity as a function of time
- Temperature at a specific place as a function of time

Fractional Brownian motion $\{B^H(t)\}_{t \geq 0}$ with the Hurst exponent $0 < H < 1$ is a Gaussian process specified by

(i) $B^H(0) = 0$.

(ii) $E[B^H(t)] = 0$ for $t \geq 0$.

(iii) $E[B^H(t)B^H(s)] = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H})$.

$$\begin{cases} < 0 & \text{if } 0 < H < 1/2 \\ = 0 & \text{if } H = 1/2 \\ > 0 & \text{if } 1/2 < H < 1 \end{cases} \quad \text{for } s < 0 < t.$$

FBM has the following properties:

- Self-similar process (Fractal)

$$E[B^H(\beta t)^2] = |\beta|^{2H} E[B^H(t)^2]$$

$$E[B^H(\beta t)B^H(\beta s)] = |\beta|^{2H} E[B^H(t)B^H(s)]$$

- Density function $p(x, t)$ of FBM is given by

$$p(x, t) := \frac{1}{(2\pi t^{2H})^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t^{2H}}\right),$$

$$\begin{cases} p_t = H t^{2H-1} \Delta p, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ p(x, 0) = \delta(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

- $H = 1/2$ corresponds to the ordinary Brownian motion:

$$p_t = \frac{1}{2} \Delta p.$$

- $B^H(t)$ is expressed as

$$B^H(t) = \Gamma(H + 1/2) \int_{-\infty}^t (t - s)^{H-1/2} dB^{1/2}(s),$$

where $dB^{1/2}(t)$ stands for the white noise.

- Sample path is $(H - \varepsilon)$ -Hölder continuous, but not H -Hölder continuous in $t > 0$ almost surely and almost everywhere.

$$(IVP) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^\mu} u, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, \end{cases}$$

Suppose that $\xi(t)$ moves like **FBM** with the Hurst exponent $H > 1/2$. Then Theorem 2.1 (Chern-Hwang-Takahashi-Y) implies that there exists a positive solution if $\mu < 2$ or if $\mu = 2$ and $\lambda < \lambda_c$, but no positive solution if $\mu > 2$ or if $\mu = 2$ and $\lambda > \lambda_c$.

Question

What happens if $\xi(t)$ moves like **FBM** with $0 < H < 1/2$?

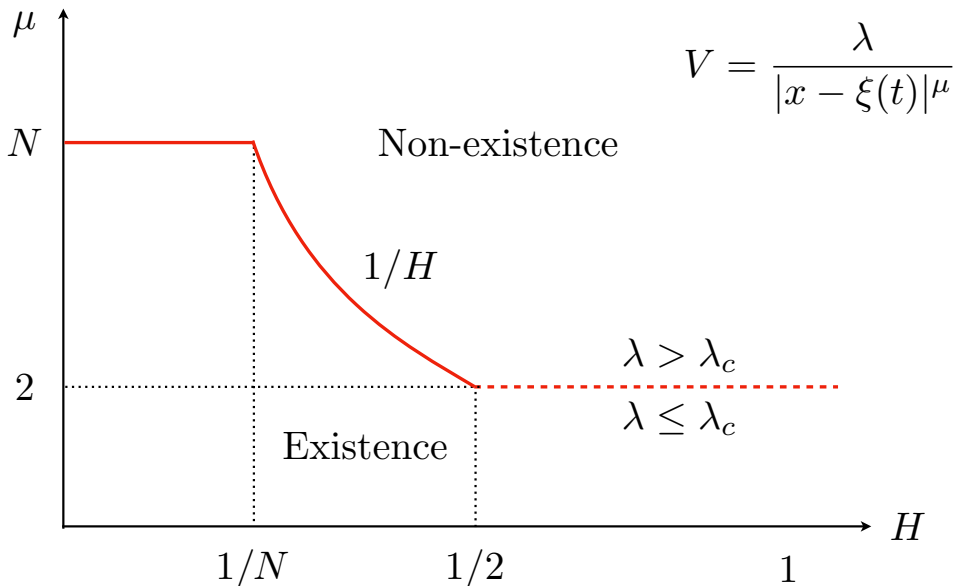
Define

$$\mu_c := \min \{1/\gamma, N\}.$$

Theorem 4.1 (Okada-Y, 2022)

Assume that $\xi(t)$ is a sample path of FBM with the Hurst exponent $0 < H < 1/2$. Then for every $t > 0$, the following holds with probability 1.

- (i) If $\mu \geq \mu_c$, then $u(x, t) = \infty$ for all $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{\xi(t)\}$.
- (ii) If $0 < \mu < \mu_c$, then there exists $C > 0$ such that $u(x, t) \leq C$ for all (x, t) with $|x - \xi(0)| + t > \delta$.



4.5 Idea of the proof

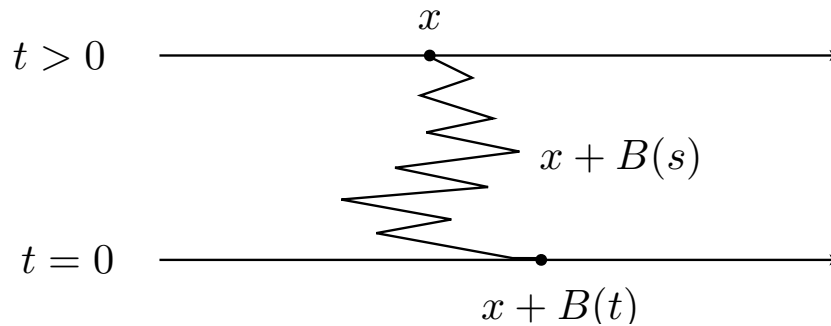
The solution of

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^\mu} u, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \{\xi(t)\}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

can be expressed as the Feynman-Kac formula:

$$u(x, t) = E_B \left[u_0(x + B(t)) \exp \left(\int_0^t \lambda |x + B(s) - \xi(t - s)|^{-\mu} ds \right) \right],$$

where $\{B(t)\}_{t \geq 0}$ denotes the N -dimensional ordinary Brownian Motion, and $E_B[\cdot]$ stands for the expectation with respect to $\{B(t)\}_{t \geq 0}$.



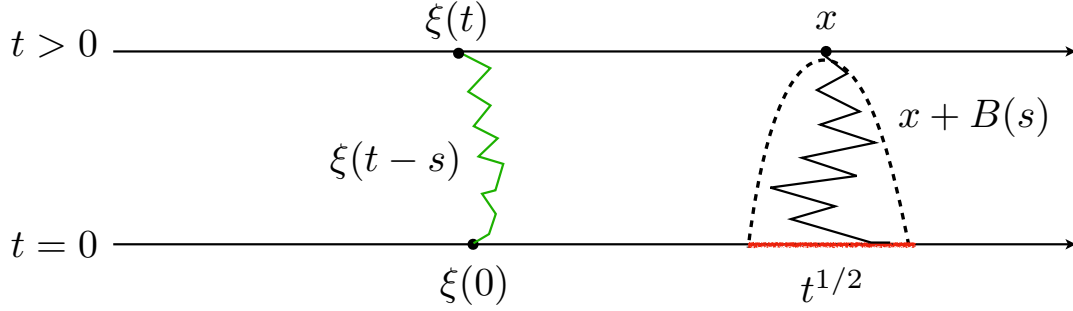
Advantages of the Feynman-Kac formula:

- Explicit expression
- Probabilistic techniques are available:

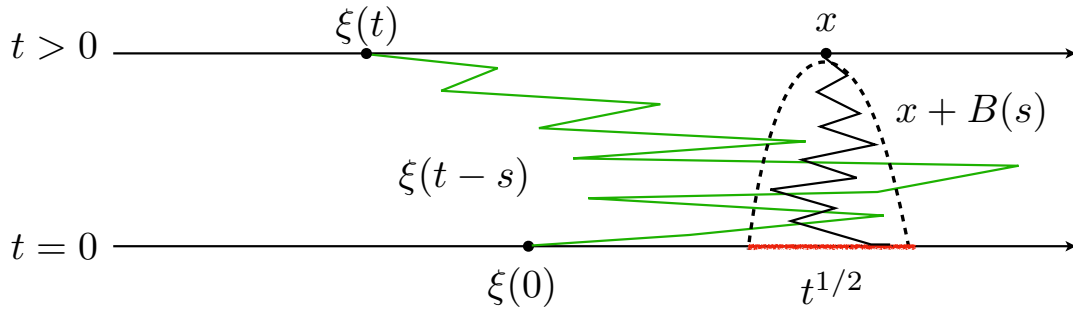
Statistic properties of the (fractional) Brownian motion are available.

Chebychev's inequality, Borel-Cantelli's lemma, ...

- $1/2 < H < 1$: Diffusion is faster than $\xi(t)$



- $0 < H < 1/2$: $\xi(t)$ moves more quickly than diffusion.



$B(s)$ is negligible compared to $\xi(t-s)$

Then by the Feynmann-Kac formula,

$$u(x, t) = E_B \left[u_0(x + B(t)) \exp \left(\lambda \int_0^t |x + B(s) - \xi(t-s)|^{-\mu} ds \right) \right],$$

we have

$$\begin{aligned} u(x, t) &\simeq E_B \left[u_0(x + B(t)) \exp \left(\lambda \int_0^t |x - \xi(t-s)|^{-\mu} ds \right) \right] \\ &\iff \frac{d}{dt} u(x, t) \approx \lambda |x - \xi(t)|^{-\mu} u(x, t) \end{aligned}$$

Using this approximation, we can estimate $u(x, t)$. This leads to the proof of Theorem 4.1. $\square$

4.6 PDE approach

$$(IVP) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^\mu} u, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0. \end{cases}$$

We consider the case where $\xi(t)$ moves irregularly, but is not necessarily a sample path of FBM.

When $\xi(t)$ is γ -Hölder continuous with $0 < \gamma < 1/2$, then the solvability of (IVP) is almost equivalent to that of

$$(IVP0) \quad \begin{cases} u_t = \Delta u + \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^\mu}, \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0. \end{cases}$$

Since the solution of (IVP0) is given by

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \int_{\mathbb{R}^N} G(x - y, t) u_0(y) dy \\ & + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} G(x - y, t - s) \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^\mu} dy ds, \end{aligned}$$

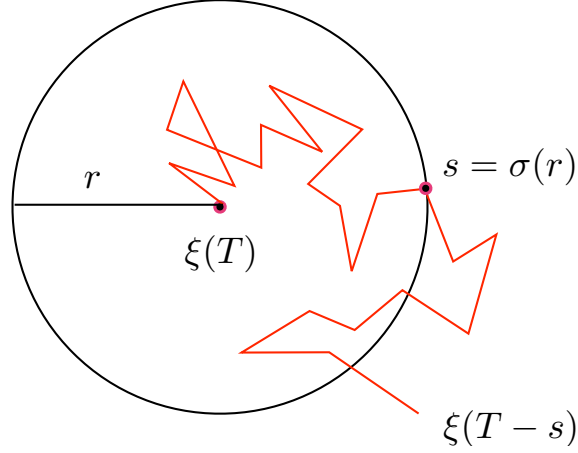
where

$$G(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right),$$

we must study the integrability of

$$I = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} G(x - y, t - s) \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^\mu} dy ds.$$

In order to estimate the integral, we introduce the **exit time** $\sigma(r)$, and the **occupation time** $\tau(r)$ in a Ball with radius $r > 0$.



- If $|\xi(T) - \xi(t)| = |T - t|^\gamma$, then

$$\sigma(r) = \tau(r) = r^{1/\gamma}.$$

- For FBM, it is known that $H > 1/N$, then

$$\sigma(r) \geq r^{1/H} \{\log \log(1/r)\}^{-1/(2H)-\delta}$$

$$\tau(r) \leq r^{1/H} \{\log \log(1/r)\}^{1+\delta}$$

for small $r > 0$.

Define

$$\mu_c := \min \{l, N\}.$$

Theorem 4.2

- (i) Assume $\tau(r) < Cr^l$ for some $C > 0$ and $l > 2$. If $\mu < \mu_c$, then there exists a positive solution of (IVP).
- (ii) Assume $\sigma(r) > Cr^l$ for some $C > 0$ and $l > 2$. If $\mu \geq \mu_c$, then there exists no positive solution of (IVP).

Proof. We use the exit time $\sigma(r)$ for a lower estimate of the integral, and the occupation time $\tau(r)$ for an upper estimate. $\square$

4.7 Remarks

[Remark on the methods]

- Probabilistic method:

Advantage: More general class of initial data.

Disadvantage: Restriction to FBM of $\xi(t)$.

- PDE method:

Advantage: More general assumptions on $\xi(t)$.

Disadvantage: Restriction on initial data.

[Related problems]

$$\begin{aligned} (1) \quad u_t &= \Delta u + \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^\mu} u && \dots \text{ positive potential} \\ (2) \quad u_t &= \Delta u + \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^\mu} && \dots \text{ inhomogeneous term} \\ (3) \quad u_t &= \Delta u - \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^\mu} u && \dots \text{ negative potential} \end{aligned}$$

When $\xi(t)$ is γ -Hölder continuous with $0 < \gamma < 1/2$, we have

Existence for (1) $\simeq$ Boundedness for (2) $\simeq$ Positivity for (3)

[Critical case $H = 1/2$]

$$u_t = \Delta u + \frac{\lambda}{|x - \xi(t)|^2} u,$$

where $\xi(t)$ behaves like the ordinary Brownian motion ($H = 1/2$).

In this case, the diffusion and the Brownian motion are balanced, and there must exist $(N - 2)^2/4 < \lambda_* \leq \lambda^* < +\infty$ such that

- (i) if $0 < \lambda < \lambda_*$, then there exists a positive solution,
- (ii) if $\lambda > \lambda^*$, then there exists no positive solution.

The exact critical value(s) of λ is unknown.

λ_* may depend on $\xi(\cdot)$.

For each $\xi(t)$, λ_* may depend on t .