円内接七角形の「面積 × 半径」公式の導出について *

森継 修一 †
筑波大学図書館情報メディア系

円内接多角形問題とは，

「円に内接する n 角形の各辺の長さ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ が与えられたとき，その n 角形の面積 S および外接円の半径 R（さらにそれらの関係）を $a_1, a_2, \ldots, a_n$ の式で表せ.」

という古典的な幾何学の問題である．現代数学では，長年未解決だった $n = 5, 6$ に対する「面積公式」を Robbins [3] が発見 (1994 年) して以来，面積公式に関する研究が数多く存在する．

一方で，終結式による消去計算を得意とする和算家は，建部賢弘「研幾算法」(1683 年) および井関知辰「算法発揮」(1690 年) において,「五角形の外接円の直径は 14 次方程式で表される」ことを示した．これらと同じ終結式の原理により，半径公式については，現代のコンピュータによる数式処理により，$n = 7, 8$ の場合まで具体的に計算されている [2].

さらに，円内接多角形の面積 S と外接円半径 R の両方を含む公式 (統合公式) については，$n = 5, 6$ の場合までが明らかにされており [1]，本研究の目的は，これを $n = 7, 8$ まで拡張することである．本講演では，現時点で得られている結果として，円内接七角形に対して $z = 4SR,\ Z = z^2 = (4SR)^2$ とおいたときこれらを根にもつ以下の多項式を導出した過程について述べる.

$$\varphi_7(z) = |z|^{38} - 8s_3|z|^{36} + \cdots + B_1|z| + B_0 \qquad (31,590\ 項) \tag{1}$$

$$\psi_7(Z) = Z^{38} - 16s_3Z^{37} + \cdots + C_1Z + C_0 \qquad (973,558\ 項) \tag{2}$$

ただし，s_i は a_j^2 に関する 7 次の基本対称式

$$s_1 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_7^2,\ \ldots,\ s_7 = a_1^2a_2^2\cdots a_7^2,\ (\sqrt{s_7} = a_1a_2\cdots a_7)$$

であり，各係数は $B_j \in \mathbf{Z}[s_1, \ldots, s_6, \sqrt{s_7}]$), $C_j \in \mathbf{Z}[s_1, \ldots, s_6, s_7]$) をみたす．この計算では，終結式による消去計算に加え，想定される結果に対して未定係数をおいて，数値的に補間する方法を採っている．さらに，未定係数の間に成り立つ整数係数の連立一次方程式の解法として，モジュラー算法を取り入れることによりメモリ使用量を抑えている．その一方で，CPU 時間の累計としては 55 日程度を要していて，そのほとんどは数値補間のための評価点の計算に費やされている．したがって，これらの計算法が円内接八角形の場合にどこまで適用可能か，今後の課題となっている.

参考文献

[1] Moritsugu, S.: Integrated Circumradius and Area Formulae for Cyclic Pentagons and Hexagons, *ADG 2014* (Botana, F. and Quaresma, P., eds.), *LNAI*, **9201**, Springer, 2015, 94–107.

[2] Moritsugu, S.: Completing the Computation of the Explicit Formulae for the Circumradius of Cyclic Octagons, *Bulletin of JSSAC*, **25**(2), 2019, 2–11.

[3] Robbins, D. P.: Areas of Polygons Inscribed in a Circle, *Discrete & Computational Geometry*, **12**(1), 1994, 223–236.

* 本研究は科研費 (25330006) の助成を受けたものである.
† moritsug@slis.tsukuba.ac.jp