折り紙の科学を基盤とする
アート・数理 および工学への応用 II

12 月 2 日 (木)	
9:50-	開会 (Opening)
10:00-11:00	特別招待講演 Special invited talk Thomas Hull (Western New England University) Face flips in flat origami and the origami flip graph
11:10-11:40	坪井 俊 (Takashi Tsuboi, 武蔵野大学) 平坦トーラスの折り紙埋め込みについて
11:40-12:10	鍛冶 静雄 (Shizuo Kaji, 九州大学) メビウス・カライドサイクル
12:10-	昼休み
13:30–14:00	舘 知宏 (Tomohiro Tachi, 東京大学) つながるかたち：アート・サイエンス協働
14:00–14:30	伊藤 大雄 (Hiro Ito, 電気通信大学) 平行山谷付き平坦折り問題 （その２）
14:30–15:00	松原 和樹 (Kazuki Matsubara, 埼玉大学) 剛辺数に着目した多面体の連続的平坦化問題
15:00-	休憩
15:20–15:50	宮本 好信 (Yoshinobu Miyamoto, 愛知工業大学) 形状記憶樹脂駆動の RES 模型試作 (FDM4D プリント技法) Prototyping RES models with Shape Memory Plastic Actuators (FDM 4D-printing technique)
15:50–16:20	ルイス ディアゴ (Luis Diago, 明治大学) Origami metamaterial reconstructing any structure including non-convex curved surface in a row
16:20–16:50	萩原 一郎 (Ichiro Hagiwara, 明治大学) 欧米中国と日本のエネルギー吸収折紙構造の研究方向の相違について

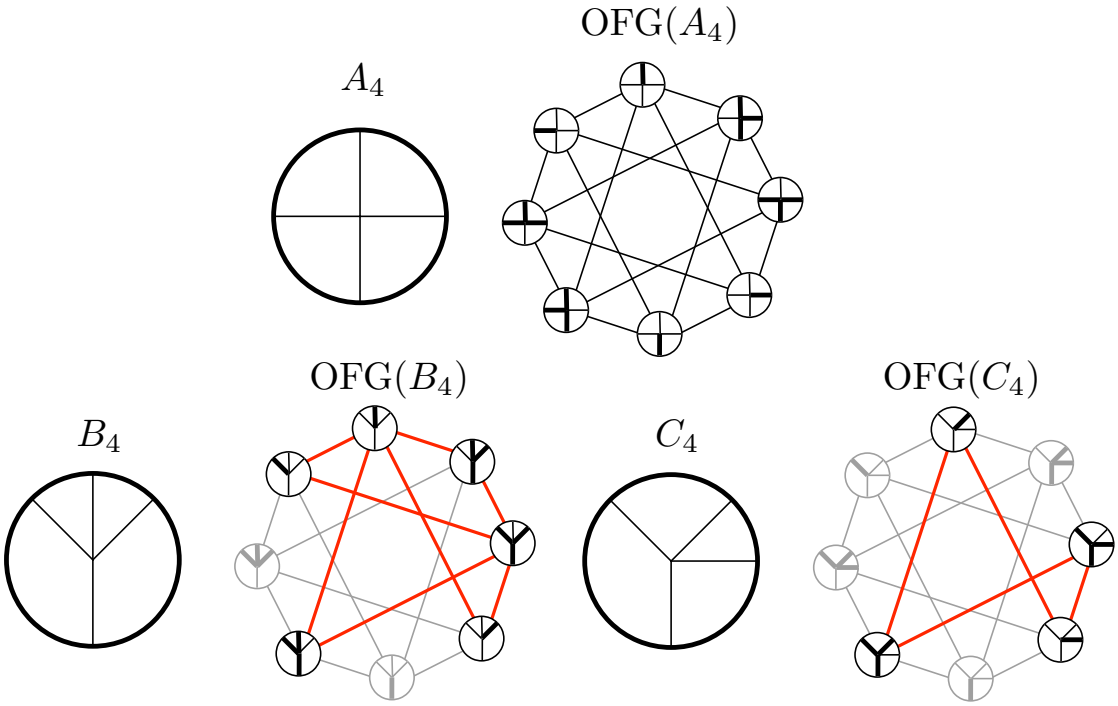
12 月 3 日（金）	
10:00-10:30	寺田 耕輔 (Kosuke Terada, 明星大学) **折紙工法におけるプレスによる折線加工法（その 2）**
10:30-11:00	上原 隆平 (Ryuhei Uehara, JAIST) **定数回の再折りで連結な凸多面体の関係の研究**
11:00-	小休止
11:10–12:10	**ショートトーク** 山崎 桂子 (Keiko Yamazaki, 明治大学) **扇研究の今後の展望** 崎谷 明恵 (Akie Sakitani, 明治大学) **折畳飲料容器の潰れ特性** 佐々木　淑恵 (Toshie Sasaki, 明治大学) **新しいトポロジー最適化手法の開発とそれを利用した安全折紙輸送箱の開発** 阿部 綾 (Aya Abe, 明治大学) **反転捩り折紙構造のエネルギー吸収特性**
12:10-	昼休み
13:30–14:00	三谷 純 (Jun Mitani, 筑波大学) **曲線折りに関する最近の研究の紹介**
14:00–14:30	石田 祥子 (Sachiko Ishida, 明治大学) **折紙タイヤプロジェクト 2019 とその後**
14:30–15:00	斉藤 一哉 (Kazuya Saito, 九州大学) **ハサミムシの扇子の工学応用**
15:00-	休憩
15:20–15:50	今田 凜輝 (Rinki Imada, 東京大学) **なまこ折りの力学系**
15:50–16:20	奈良 知恵 (Chie Nara, 明治大学) **正 24 胞体の折りたたみとオクタバグ**
16:20–16:30	閉会（Closing）

Face Flips in Flat Origami and the Origami Flip Graph

Thomas C. Hull
Department of Mathematical Sciences
Western New England University, MA, USA
thull@wne.edu

Abstract

Flat origami studies straight line, planar graphs $C = (V, E)$ drawn on a region $R \subset \mathbb{R}^2$ that can act as crease patterns to map, or fold, R into $\mathbb{R}^2$ in a way that is continuous and a piecewise isometry exactly on the faces of C. Associated with such crease pattern graphs are *valid mountain-valley (MV) assignments* $\mu : E \to \{-1, 1\}$, indicating which creases can be mountains (convex) or valleys (concave) to allow R to physically fold flat without self-intersecting. In this talk, we discuss how valid MV assignments of single-vertex crease patterns are related to one another via *face-flips*, a concept that emerged from applications of origami in engineering and physics, where flipping a face F means switching the MV parity of all creases of C that border F. Specifically, we study the origami flip graph $\mathrm{OFG}(C)$, whose vertices are all valid MV assignments of C and edges connect assignments that differ by only one face flip. (Examples of origami flip graphs are shown below.) We prove that, for the single-vertex crease pattern A_{2n} whose $2n$ sector angles around the vertex are all equal, $\mathrm{OFG}(A_{2n})$ contains as subgraphs all other origami flip graphs of degree-$2n$ flat origami single-vertex crease patterns. We also prove that $\mathrm{OFG}(A_{2n})$ is connected and has diameter n by providing two $O(n^2)$ algorithms to traverse between vertices in the graph, and we enumerate the vertices and edges in $\mathrm{OFG}(A_{2n})$. We conclude with open questions on the surprising complexity found in origami flip graphs of this type.



平坦トーラスの折り紙埋め込みについて

坪　井　　俊

武蔵野大学数理工学センター / RIKEN iTHEMS

mail@tsuboi-takashi.sakura.ne.jp

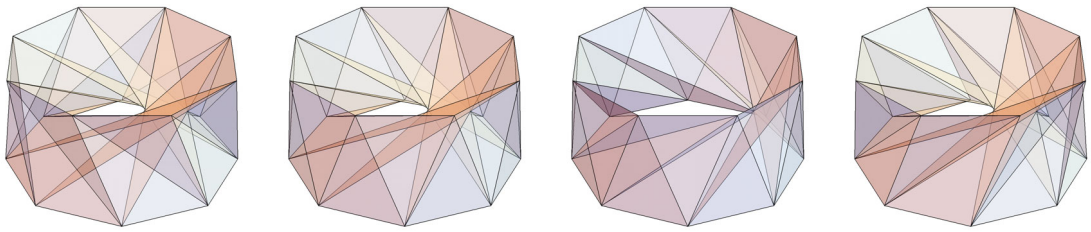
武蔵野大学研究費支援に感謝します。ご議論いただいた増田一男さん、鍛冶静雄さん、古田幹雄さんに感謝します。

任意のモジュラスを持つ平坦トーラスの３次元ユークリッド空間への折り紙埋め込みが具体的に構成できることを説明します。

ナッシュとカイパーは、任意の閉曲面に任意のリーマン計量を与えたとき、これを１回連続微分可能 (C^1) に曲線の長さを保つように３次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ に埋め込むことができることを示しました。これはグロモフによるホモトピー原理定式化への源流のひとつとなりました。平坦トーラスの C^1 等長埋め込みは、V. Borrelli, S. Jabrane, F. Lazarus, D. Rohmer and B. Thibert により、具体的に構成され、その概形はビデオで見ることができます。証明から予想されるものとは言え、実際に埋め込んで見せることは自明ではありません。折り紙として埋め込むのはもっと簡単ではないかという雑談から始まりました。情報収集で見つけたものを変形して具体的に構成できることになりました。

調べてみると、舘知宏さんのウェブページ、Zalgaller, Bern-Hayes, Segerman という人たちの論文、Segerman 氏のショップページなどがありました。論文を書いたのちに Burago-Zalgaller の 1996 年の論文に埋め込みの構成が書かれているということ、それが Gromov の Partial Differential Relations に引用されていることが Saucan という人の 2010 年の論文に書かれているということを古田幹夫先生に教えていただきました。

講演では、平坦トーラスの C^1 等長埋め込みのビデオ、Zalgaller、Burago-Zalgaller の構成を説明し、Segerman 氏の平坦トーラスの埋め込みを説明します。結果の証明の概略は以下のようになります。平坦トーラスの相似類の分類は、関数論における楕円曲線の分類と同値で、上半平面 $\mathbf{H}^2$ への $PSL(2;\boldsymbol{Z})$ 作用の商の空間 $\mathbf{H}^2/PSL(2;\boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{C}P^1(2,3,\infty)$ の点と同値類が対応します。Segerman 氏の埋め込みの変形のモジュラスを計算し、純虚数以外のすべての点が現れることを示します。このときにサイクロイドが現れます。純虚数のモジュラスを持つ平坦トーラスは、Segerman 氏の埋め込みの１つの平面の片側のダブルをとることで得られます。



メビウス・カライドサイクル

鍛冶 静雄 (九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所)

カライドサイクル [6] は，合同な四面体が向かい合う辺をヒンジとして環状に連結されたリンク機構であり，クルクルと回すことができる．(ハサミと糊は使うが) 一枚の紙から折ることができ，剛体折紙の一種ともみなせる．一つのヒンジは一次元の自由度を持つので，カライドサイクルの動きの自由度は連なる四面体の数 n に従って大きくなることが予想されるが，変数の数と制約の数を数え上げることで一般には $n-6$ であることが分かる．ポピュラーな $n=6$ のカライドサイクルが上の計算に反して一次元自由度を持つのは，その対称性により制約が冗長になっているためである [1]．このように期待される自由度より実際の自由度が大きくなる機構は珍しくないが，反対に期待される自由度より実際の自由度が小さくなることも稀に起こる．これは，機構の状態が幾何的制約のなす方程式系の実数解に対応するという，実数の性質に起因する現象で，解析や設計は非常に困難である．

講演者は OIST の研究者と共同で，任意の $n \geq 7$ について，四面体の形を特別に選ぶことで一次元の動きの自由度[1]を持つカライドサイクルを発見し，三半捻りのメビウスの帯のトポロジーを持つことからメビウス・カライドサイクルと名付けた [4, 5]．メビウス・カライドサイクルは，実際の自由度が正でありかつ期待される自由度より小さい非自明な機構として，珍しい族を成している．さらに，九州大学の研究者と共同で，この自由度 1 の運動が可積分系によって記述できる[2]ことや [3]，それに伴い物理的に意味のある保存量を持つことを示すことができた．メビウス・カライドサイクルは，代数，トポロジー，可積分系という様々な数学が折紙工学と出会う興味深い対象となっている．この講演では，まだ不明なことの多いこの対象の面白さをお伝えしたい．

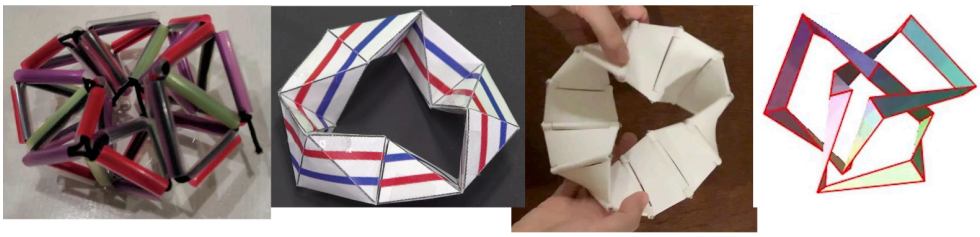


図 1: ストロー・紙・3D プリントで作られた模型と三葉結び目状のメビウス・カライドサイクル

参考文献

[1] P. W. Fowler and S. D. Guest, *A symmetry analysis of mechanisms in rotating rings of tetrahedra*, Proc. R. Soc. A (2005) 461, 1829–1846.

[2] S. Kaji, メビウス・カライドサイクルのシミュレーションコード・展開図・3D プリントデータ, `https://github.com/shizuo-kaji/Kaleidocycle`

[3] S. Kaji, K. Kajiwara, H. Park, *Linkage Mechanisms Governed by Integrable Deformations of Discrete Space Curves*, Nonlinear Systems and Their Remarkable Mathematical Structures, Volume 2, pp 356–381, CRC Press, 2019.

[4] S. Kaji, J. Schoenke, E. Fried, and M. Grunwald, *Moebius Kaleidocycle*, Patent Publication Number WO2019167941, filed on 27 Feb. 2018.

[5] J. Schoenke and E. Fried, *Single degree of freedom everting ring linkages with nonorientable topology*, PNAS 116 (1), 90–95, 2019.

[6] D. Schattschneider and W. M. Walker, *M. C. Escher Kaleidocycles*, Pomegranate Communications: Rohnert Park, CA, 1987.

[1]実は，自由度が 1 であることは数値的に確認されただけで，数学的にはまだ証明できていない．「方程式の実解のなす空間の上で定まるある関数の特異集合の次元が 1 である」という主張になる．

[2][2] で動いている様子を見ることができる．

つながるかたち：アート・サイエンス協働

舘 知宏（東京大学 大学院総合文化研究科）

単純なかたちが一定のルールでつながり、全体を構成するしくみは、人工物、自然現象を問わず現れる普遍的な原理です。美術家の野老朝雄氏はこの原理を「個と群」と呼び、多様につながる作品群を生み出しています。講演者が野老氏と協働し、東京大学教養学部にて開講した授業『個と群』（文理融合ゼミナール）では、学生が教員と協働し「個と群」の創造プロセスを実践しました。これらの活動からは新たな発見や問いが生まれ、諸分野の研究へとつながっています。四面体の測地線分割形状とかごめ編み構造[1]、非周期な Auxetic 構造[2]、3 自由度の折紙式ロボットアーム[3]、Schwartz-D surface を多面体化した充填構造を作るブロック[4]、など、授業から生まれた研究を紹介します。かたちをつくることから始まる学術の連鎖をテーマとした展示[5]についても紹介します。

Photo: Choku Kimura

1. Seri Nishimoto, Takashi Horiyama, Tomohiro Tachi, Polyhedral Forms from Geodesic Strips, the Society of Engineering Science virtual conference 2020
2. Kanata Warisaya, Hiroaki Hamanaka, Asao Tokolo, Tomohiro Tachi, Auxetic Structures Based on Rhombic Tiling, Proceedings of ASME IDETC/CIE2021
3. Haruto Kamijo, Tomohiro Tachi, Serial Chain of Rigid Origami That Extends, Bends and Turns, Proceedings of ASME IDETC/CIE2021
4. 木島凪沙，舘 知宏，ダイヤモンド格子型のジョイントシステムの提案，Conference on 4D and Functional Fabrication 2021
5. 「つながるかたち展 CONNECTING ARTIFACTS 01」駒場博物館, 2021/9/18-11/28 http://museum.c.u-tokyo.ac.jp/2021.html#CONNECTING%20ARTIFACTS2021

平行山谷付き平坦折り問題 — その 2

伊藤大雄　　根芝冴
電気通信大学 大学院 情報理工学研究科
itohiro@uec.ac.jp　s.neshiba131@gmail.com

折り紙の平坦折り問題とは、紙片とその上に描かれた折り線が与えられ、全ての折り線を 180 度に折って、折りあがりを平坦にすることができるか否かを問う問題であり、各折り線に山折り (M) か谷折り (V) かが与えられている問題と、与えられず自由に折れる問題の二通りあるが、どちらも一般には NP 完全である [3]。しかし多項式時間解法が知られている部分問題も存在する。例えば、紙片を長方形とし、折り線を短辺に平行なもののみに限定し、折り線に山谷を与えた問題[1]、1 次元山谷付き平坦折り問題 (One-dimensional flat foldability with mountain-valley assignment; 1DFF-MV) に対する線形時間アルゴリズムが Arkin ら [1] によって与えられている。その問題の拡張として、紙片を平行四辺形に拡張し、折り線をやはり短辺に平行なもののみに限定した問題、平行斜め山谷付き帯平坦折り問題 (Strip flat folding problem with parallel creases and mountain-valley assignment; StripFFP-MV) に対し、2020 年に著者らのグループによって [2]、さらに最近、その結果を紙片が**凸多角形**のものにまで拡張し、線形時間アルゴリズムが示された [4]。本講演では、この結果を含め、さらなる拡張の試みについて述べる。

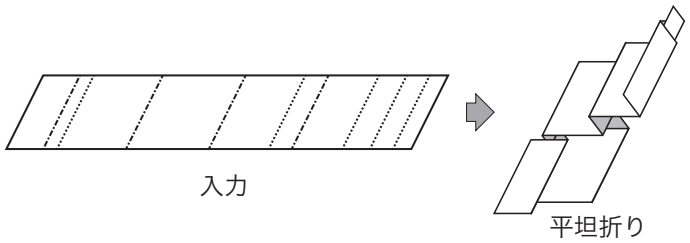


図 1: 平行山谷付き平坦折り問題：紙片が平行四辺形の例

参考文献

[1] Esther M. Arkin, Michael A. Bender, Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Joseph S.B. Mitchell, Saurabh Sethia, and Steven S. Skiena: When can you fold a map?, Computational Geometry: Theory and Applications, Vol. 29, No. 1, pp. 23–46, 2004.

[2] Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Hiro Ito, Chie Nara, Izumi Shirahama, Tomohiro Tachi, and Mizuho Tomura: Flat folding a strip with parallel or nonacute zig-zag creases with mountain-valley assignment, Special Issue on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games, Journal of Information Processing, Vol. 28, No. 12, pp. 825–833, 2020.

[3] Erik D. Demaine and Joseph O'Rourke: Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra, Cambridge University Press, 2007.

[4] Hiro Ito and Sae Neshiba: Flat folding problem with parallel creases with mountain-valley assignment on a convex polygonal piece of paper, The 23rd Thailand-Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games (TJCDCG^3 2020+1), Chiang Mai, Thailand, Sept. 3–5, 2021.

[1]山谷を与えられていない場合はジグザグに折る（すなわち、山谷を交互に与える）ことで自明に平坦折り可能。

剛辺数に着目した多面体の連続的平坦化問題

松原和樹 （埼玉大学教育学部）
奈良知惠 （明治大学先端数理科学インスティテュート）

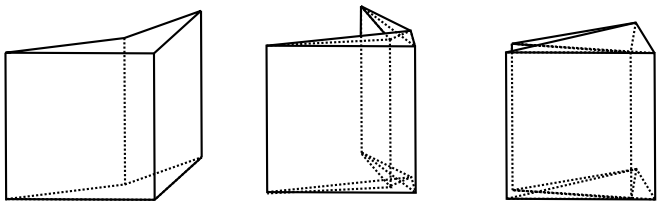
折り目によって折ることができる紙のような素材でできた多面体を平坦に折り畳む問題（詳細は[1]を参照）を考える。ただし，ここでは紙の厚さは考えず，切込みや伸縮は許されないものとする。「多面体が各面の形状を変えずに連続的に変形したとしても，その体積は不変である」というフイゴ定理[2]より，多面体の連続的平坦化においてすべての面の剛性を保つことは不可能であることが示される。つまり，平坦化状態への連続的な変形においては，いずれかの面を連続的に動く折り目（移動折り目）によって変形させる必要がある。これまで様々な連続的平坦化手法が考案され，特に著者らは移動折り目領域の大きさ，剛性を保つ面（剛面）数，剛性を保つ辺（剛辺）数などに着目した研究を進めてきた（例えば，[3, 4]）。

本講演では，剛辺数に着目した連続的平坦化問題において得られたいくつかの結果を報告する。特に，5 つの正多面体それぞれの連続的平坦化における剛辺数の最大値に関する結果（最大値またはその上界と下界）を以下に示す。

	正四面体	立方体	正八面体	正十二面体	正二十面体
最大剛辺数	5	11–12	10	25–30	21–27

最後に，すべての辺を剛辺とした場合について，得られた結果と予想を述べる。

定理 すべての辺の剛性を保つ連続的平坦化が可能な多面体は存在する。



例 すべての辺の剛性を保つ非凸四角柱の連続的平坦化

予想 どんな凸多面体に対しても，すべての辺の剛性を保つ連続的平坦化は不可能である。

本講演の内容は[5]に基づいている。

参考文献

[1] Demaine, E.D., O’Rourke, J.: Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra, Cambridge University Press, 2007.

[2] Connelly, R., Sabitov, I., Walz, A.: The bellows conjecture, Beiträge Algebra Geom. 38, 1–10, 1997.

[3] Matsubara, K., Nara, C.: Continuous flattening of α–trapezoidal polyhedra, J. Inf. Process. 25, 554–558, 2017.

[4] Matsubara, K., Nara, C.: Continuous flattening of multi–layered pyramids with rigid radial edges, J. Inf. Process. 28, 834–840, 2020.

[5] Matsubara, K., Nara, C.: The maximum numbers of the rigid faces and edges in continuous flattening of polyhedra, in preparation for Proceedings of the 23rd Thailand–Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games (TJCDCG^3 2020+1).

形状記憶樹脂駆動のRES模型試作 (FDM4Dプリント技法)

Prototyping RES models with Shape Memory Plastic Actuators (FDM 4D-printing technique)

愛知工業大学 工学部　Aichi Institute of Technology
建築学科 宮本 好信　Yoshinobu Miyamoto
機械学科 武田 亘平　Kohei Takeda

本研究ではRES(Rotational Erection System, 回転建立方式)の駆動起立可能な模型をCMスケールでFDM(Fused Deposition Modeling)方式の3Dプリンタで試作する。

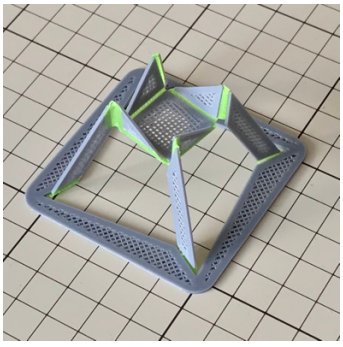
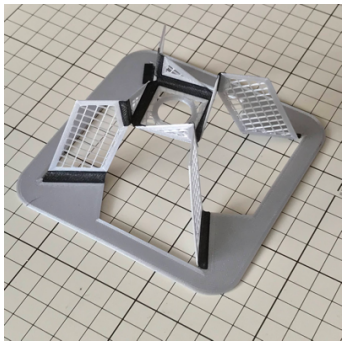
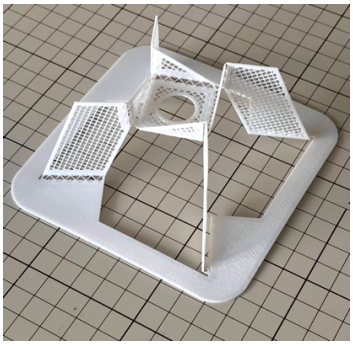
3Dプリンタの多くは出力台上に順次積層する方式であり、立体物の高さに比例して出力時間を要する。平坦に出力したものを自律的折り紙機構で立体化する方法により大幅な出力時間の短縮ができる。これに類する出力の工夫を4Dプリントとして戦略的に活用する研究が盛んである。

RESは平坦な薄板材に折り目と切れ目を入れて面外方向に起立させる加工法であり、4Dプリントに好適な技法である。これまで自律的な起立駆動をさせる技法として圧延伸長樹脂板を基材としてヒンジ部分に熱線吸収材を塗布し、熱線(赤外線)を照射して、基材製造時の残留応力を利用して駆動する技法を試み、一定の成功を得ていた。

形状記憶素材は、1980年代から基礎研究が進み、合金材(SMA)は2000年代には温度調整混合水栓や眼鏡フレームなどに実用化された。一方、樹脂材(SMP)の研究はSMAに比べてやや遅れたが、これまでにブラジャーカップやメガネの鼻当てに応用され、2018年にFDM方式の3Dプリンタで利用できる素材が開発・販売された。

FDM方式の3Dプリンタは2010年代後半以後、産業用から家庭用まで幅広く普及しており、産業応用だけでなく、アートや工芸への波及範囲がひろく、同方式でのRES駆動技法は他分野への汎用的発展性が期待できる。

本試作ではRESを平坦出力後、ヒンジ部分にSMP駆動部品を付加し、加熱により起立する方法を実証する。その際にRESの二安定性(bistability)を利用して、起立後の安定性を確保する。また、ヒンジ部にSMP素材を平坦出力して、加熱による起立を可能にする方法についても考察する。

Origami metamaterial reconstructing any structure including non-convex curved surface in a row

L. A. Diago, J. Shinoda and I.Hagiwara,
Meiji University & Interlocus Inc., JAPAN

Introduction

Nojima and Saito introduced the term “kirigami honeycomb” in [1] where they use the cross section of the 3D shape to describe the panel and include cuts in the pattern to obtain its 3D structure. Neville et al [2] have studied the mechanical properties of “kirigami-honeycomb” panels to test its feasibility of using shape memory polymers (SMPs) to actuate the folds in open Kirigami-honeycombs. Recently, Caslish and Gershenfeld [3] designed a continuous folding machine to construct the Kirigami patterns obtained by the previous method [1]. However, above approaches [2, 3] also use two curves in the cross section of the shape that limits the representation of shapes with more complex geometries. In our proposal, the design method is generalized for more complex shapes based on 3 fundamental contributions: 1) the need to represent the shape by 2 curves in the cross section to represent any 3D shape is eliminated, 2) the ”honeycomb cores” are embedded in the 3D shape by means of boolean operations on the 3D shape and 3) an optimal method of assigning folding lines, cutting and gluing areas was developed for the manufacturing of the panel.

Materials and methods

The main problematic point to build complex 3d shapes resides in the presence of non-convex unit cells that overlap in the projection from 3D o 2D plane [1-3]. Instead of using Caslish and Gershenfeld [3] iterative approach to ensure that no sections of the folding pattern overlap, we propose the following two-step algorithm to avoid overlap and minimize the amount of un-used materials in the final pattern. The algorithm 1 can work with any solid model and the pattern is automatically computed by the operations in steps 12 and 13.

Algorithm 1 Two-step Algorithm to minimize the amount of un-used materials

```
1:  procedure CREATEPATTERN(model, C, Dir)          ▷ The 3D model, cell size and direction
2:      bbox ← model.BoundBox
3:      nx ← bbox.XLength/C
4:      ny ← √3 ∗ bbox.YLength/(3 ∗ C)
5:      for i = 0 to nx do
6:          for j = 0 to ny do                      ▷ First pass
7:              Compute min-max of 5 faces in Cell_j (a',b',c',d')
8:              Compute Cell_j.BoundBox
9:              Update Column_i.BoundBox with Cell_j.BoundBox
10:         for j = 0 to ny do                      ▷ Second pass
11:             F_k ← Create 5 faces in Cell_j
12:             P_k ← model.common(F_k)             ▷ Boolean operation
13:             Pattern ← P_k.rotate(Dir)           ▷ Update the pattern
14:     Optimize Pattern with Pattern.BoundBox, Glue, Mountain & Valley lines
```

Preliminary Results

The proposed Algorithm 1 has been programmed in Python version 3.8.6 within FreeCAD Version0.19.23578 and macOS High Sierra (10.13). Figure 1A shows the Stanford Bunny model[1]. The dimensions of the model are 86.33mm x 66.71mmx 85.21mm and the size of the file is 25.3MB. Figure 1C shows the results of the boolean operations between the original solid model and the uniform honeycomb and the resulting pattern from the Algorithm 1. The cell size used for the experiment was 10mm and the Y-direction was selected to create the cells. Figure 1C shows a photo of the paper copy-model created from the pattern in Figure 1B.

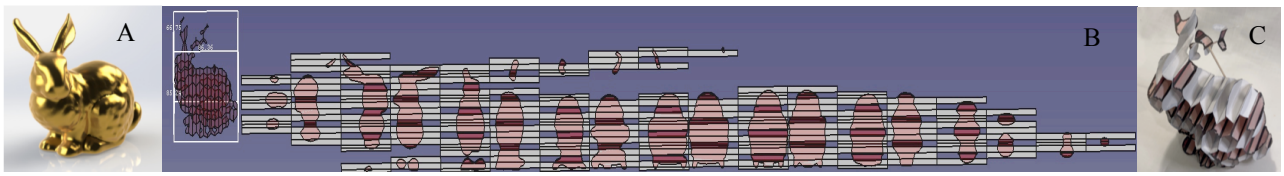


Figure 1. Honeycomb representation of Stanford Bunny.

References

[1] Nojima, T., and Saito, K. Development of Newly Designed Ultra-Light Core Structures, JSME Int. A 2006, 49(1), pp. 38–42. doi:10.1299/jsmea.49.38
[2] RM Neville, et al., A kirigami shape memory polymer honeycomb concept for deployment.308Smart Mater. Struct.26, 05LT03 (2017)
[3] Calisch, SE, and Gershenfeld, NA. Towards Continu- ous Production of Shaped Honeycombs. Proceedings of the ASME 2018 13th International Manufactur- ing Science and Engineering Conference. Volume 3: Manufacturing Equipment and Systems. College Sta- tion, Texas, USA. June 18–22, 2018. V003T02A007. ASME. doi:10.1115/MSEC2018-6646

[1] Downloaded from https://grabcad.com/library/stanford-bunny-solid- model/files

欧米中国と日本のエネルギー吸収折紙構造の研究方向の相違について

萩原一郎（明治大学）

エネルギー吸収折紙構造の重要性は、図１、図２からも明確である。折紙構造として、蛇腹折りなどの１節点４折線、反転螺旋折紙構造(RSO)や反転捩り折紙構造(RTO)などの１節点６折線、更に、準折紙構造で検討が進められている。ここで準折紙構造の定義は、1) 柱の壁面に設けられる軸方向斜め螺旋は軸方向への変形を誘導できる。2)軸方向入力に対し斜めに受けることにより初期ピーク荷重値を下げることを可能とする。3)軸方向斜め線により他端の断面積の過大を避けるべく段が設けられる。4)各交点で山線と谷線の数の差が±２と、一つ置きの角度の和が 180 度の折畳条件を満たす。このうち、4) 以外を満たす構造である。欧米中は４折線で専ら検討が進められているのに対し、 我々は、６折線や準折紙構造で検討を進めている。唯一大学の研究室で試作できるのは６折線の RTO である。図５の充液プレス法[1]を実現し、４折線、６折線及び準折紙構造の得失をシミュレーションと試作実験で行うべくここでは充液プレス法で得られる準折紙構造の特性を論じる。

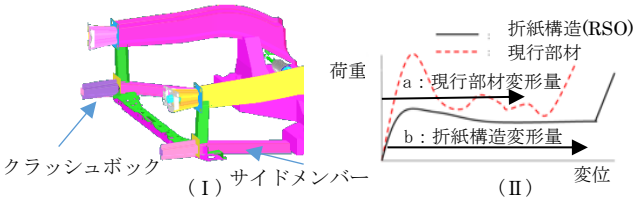


図１ 現行部材の初期ピーク荷重が高く変形量も短い課題を折紙構造が解決する様子

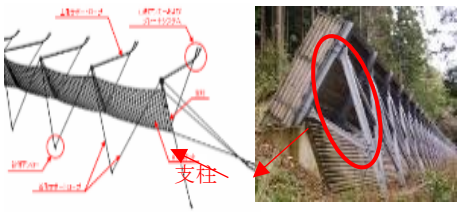


図２ 落石防護柵の支柱

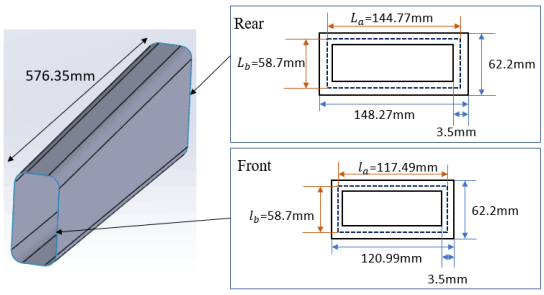


図３トラッククラッシュボックス構造例

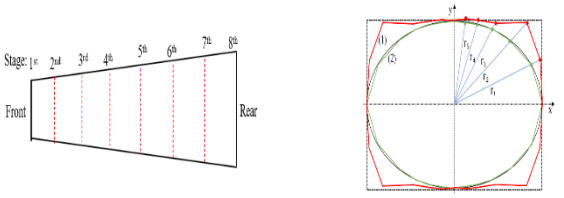


図４トラッククラッシュボックス準折紙構造を司る$r_1, r_2, r_3, r_3, r_4, r_5$

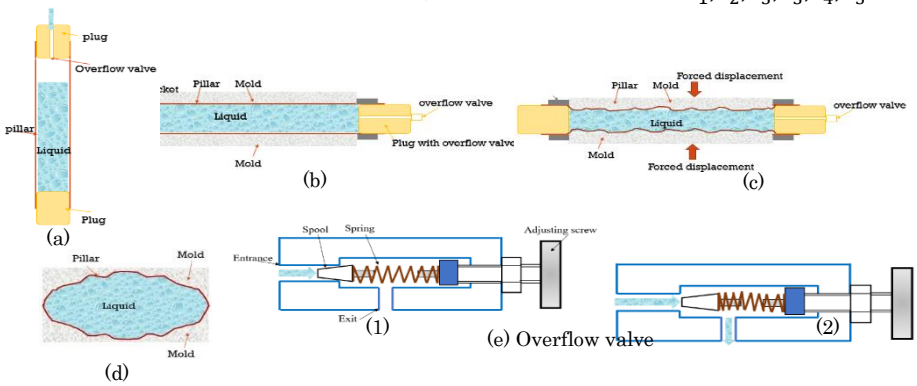


図５ ４折線折紙構造や準折紙構造の安価な製造の可能性のある充液プレス法概要

[1] 萩原一郎、趙希禄、楊陽、衝撃吸収材及び衝撃吸収材の製造方法、出願番号：特願 2019-214428（出願日：令和元年 11 月 27 日）.

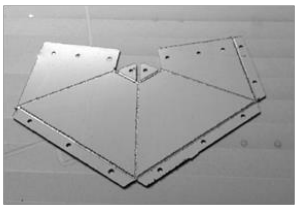
折紙工法におけるプレスによる折線加工法（その2）

明星大学　理工学部　機械工学系　寺田耕輔

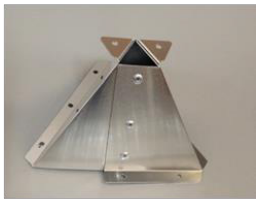
近年において折紙工法（図1）と呼ぶ工法を提唱[1~4]している．この工法では，多様な形状の製品を短納期で製作することができる．見た目も美しく，シャープな曲げ角(図2)となっている特徴がある．これは，曲げの内側にあたる部分を平板の状態であらかじめV溝状に切削してから曲げる方法をとっているからである．しかし，切削加工を行うにはCNCルータあるいはマシニングセンタなどの設備が必要となり，かつ切削加工時間を要するため大量生産に適さない問題がある．この問題を解決するため先端に丸みがあるＶ型工具（図3,4）をプレスにより押込み折線上にＶ溝加工した後，曲げ加工を行う工法の研究開発[5]を進めている．昨年の発表に続いて，今回の発表“その２”では次の項目について報告する．

1)　V型工具押込み荷重Pと進入量ηの関係(図5)
2)　V型工具進入による板材跳ね上がり角γとスプリングバック$\Delta\gamma$(表1)
3)　V型工具の端末効果(図6)

(a) CNCルーターで溝加工



(b) 溝加工後のアルミ板材(厚1.5mm)



(c) 製作品(1辺200mm)

図1 折紙工法の事例

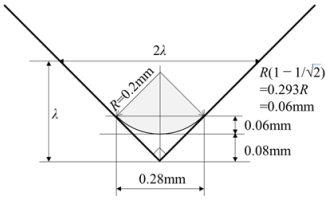
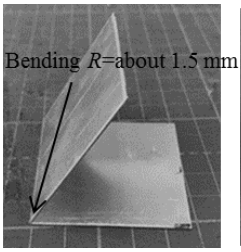
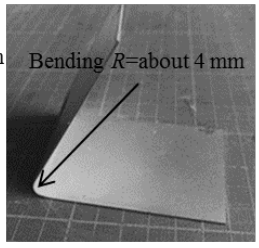


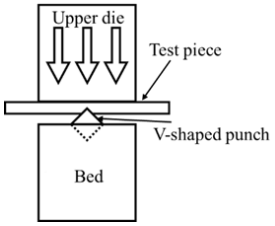
図4 V型工具先端部形状



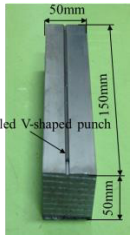


(a) 折線がある場合(可)　(b) 折線がない場合(不可)

図2 折紙工法のシャープ曲げ事例（軟鋼板厚0.8mm）



(a) V型工具を用いた折線加工要領



(b) V型工具とベッドの写真

図3　V型工具の取扱方法説明図

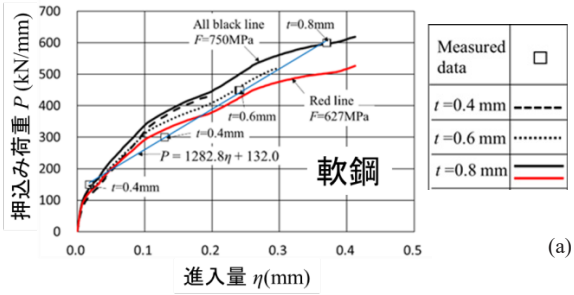
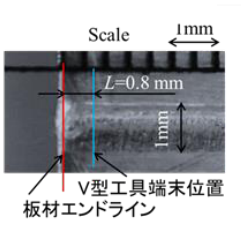
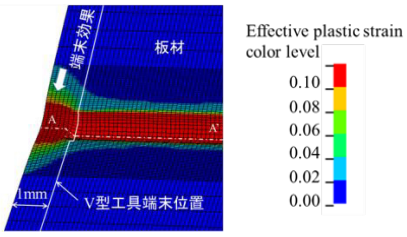


図5 V型工具押込み荷重と進入量の関係



(a)　板材エンドライン付近での折線延長現象の写真例



(b) V型工具端末効果のFEM解析結果例

図6 V型工具の端末効果

表1 V型工具進入による板材跳ね上がり角γとスプリングバック$\Delta\gamma$

	t [mm]	γ [°]	$\Delta\gamma$ [°]
Mild steel	0.8	8.2	0.12
	1.2	6.1	0.12
	1.6	4.4	0.09
Aluminum	0.8	8.1	0.09
	1.2	5.9	0.09
	1.6	4.2	0.07

参考文献

1)Nguyen, T. T. H., Terada, K., Tokura, S. S. and Hagiwara. I. : Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., **80**-819 (2014), DOI: 10.1299/transjsme.2014smm0314.

2)Terada. K., Tokura. S., Sato. H., Makita. A. and Hagiwara. I.: Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., **81**-828 (2015), DOI: 10.1299/transjsme.15-00039.

3) Terada. K. and Hagiwara. I. : J., Jpn. Soc. Mech. Eng., **119**-1175 (2016), 564-565.

4) Terada. K. : J., Jpn. Soc. Technol. Plast., **1**-3 (2018), 33-37.

5) Terada. K. and Hagiwara. I.: Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng., **87**-898 (2021), DOI: 10.1299/transjsme.21-00070.

Any Regular Polyhedron Can Transform to Another by $O(1)$ Refoldings

Erik D. Demaine* Martin L. Demaine* Yevhenii Diomidov*
Tonan Kamata† Ryuhei Uehara† Hanyu Alice Zhang‡

多面体 Q を展開して得られた展開図を別の折り線で折ることで別の多面体 Q' が得られるとき，多面体 Q が多面体 Q' に**再折り可能**であるという．つまり Q と Q' は共通の展開図をもつ．(Q や Q' の面の中を切ってもよいことに注意する.）2 つの正多面体の間が再折り可能であるかどうかという問題は何度か独立に提案され [6, Open Problem 25.6]，関連する結果はいくつか知られている [1, 8, 5, 9, 2, 7] が，今でも未解決である．

本研究では，再折り可能であるという関係を 2 項関係ととらえ，その閉包を考える．つまり与えられた多面体 Q と Q' に対し，$Q = Q_0, Q_1, \ldots, Q_k = Q'$ という多面体の列が存在し，Q_i から Q_{i+1} にそれぞれ再折り可能なとき，Q から Q' に k 回の再折りで到達可能であると考える．このとき k を Q と Q' に関する再折り列の長さと定義する．

では任意の多面体のペア Q,Q' に対して，これらが同じ表面積を持つとき，その間に有限の長さの再折りの列が存在するだろうか？本研究では，数多くの多面体の間に有限長の再折り列が存在することを明らかにした：

Theorem 1 *(1)* 任意の *4* 単面体のペアは互いに再折り可能．*(2)* 任意の *2* 重被覆 *3* 角形は *4* 単面体に再折り可能．*(3)* 任意の正多角柱，ねじれ正多角柱，*2* 重被覆正多角形は *4* 単面体に再折り可能．*(4)* 任意の *4* 面体は *3* 回の再折りで *4* 単面体に再折り可能．*(5)* 正 *12* 面体は *4* 回の再折りで *4* 単面体に再折り可能．

この結果，特に任意の正多面体のペアは高々6 回の再折りで到達可能であることが示された．

本結果の詳細は [3, 4] を参照されたい．

*CSAIL, MIT, USA. {edemaine,mdemaine,diomidov}@mit.edu
†School of Information and Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology, Japan. {kamata,uehara}@jaist.ac.jp
‡School of Applied and Engineering Physics, Cornell University, USA. hz496@cornell.edu

References

[1] Y. Araki, T. Horiyama, and R. Uehara. Common unfolding of regular tetrahedron and Johnson-Zalgaller solid. *Journal of Graph Algorithms and Applications*, 20(1):101–114, February 2016.

[2] A. S. Biswas and E. D. Demaine. Common development of prisms, anti-prisms, tetrahedra, and wedge. In *Proceedings of the 29th Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2017)*, pages 202–207, 2017.

[3] E. D. Demaine, M. L. Demaine, Y. Diomidov, T. Kamata, R. Uehara, and H. A. Zhang. Any Regular Polyhedron Can Transform to Another by O(1) Refoldings. arXiv:2109.03997, September 2021.

[4] E. D. Demaine, M. L. Demaine, Y. Diomidov, T. Kamata, R. Uehara, and H. A. Zhang. Any regular polyhedron can transform to another by O(1) refoldings. In *Proceedings of the 33rd Canadian Conference on Computational Geometry (CCCG 2021)*, pages 332–342, 2021.

[5] E. D. Demaine, M. L. Demaine, J.-i. Itoh, A. Lubiw, C. Nara, and J. O'Rourke. Refold rigidity of convex polyhedra. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 46(8):979–989, October 2013.

[6] E. D. Demaine and J. O'Rourke. *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*. Cambridge University Press, 2007.

[7] T. Horiyama and R. Uehara. Nonexistence of common edge developments of regular tetrahedron and other Platonic solids. In *Proceedings of the China-Japan Joint Conference on Computational Geometry, Graphs and Applications (CGGA 2010)*, pages 56–57, 2010.

[8] T. Shirakawa, T. Horiyama, and R. Uehara. On common unfolding of a regular tetrahedron and a cube (in Japanese). *Origami No Kagaku (Journal of Science Origami in Japanese)*, 4(1):45–54, 2015.

[9] D. Xu, T. Horiyama, T. Shirakawa, and R. Uehara. Common developments of three incongruent boxes of area 30. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 64:1–17, August 2017.

扇研究の今後の展望

山崎桂子，ルイス・ディアゴ，萩原一郎（明治大学）

和紙と竹骨で出来た日本の独自の”扇”の芸術的価値は，扇の扇面への描画そのものだけにあるのではなく，扇面を凹凸に折上げた上で骨を差すことで生まれる 3 次元的な表現にもある. しかし日本ではそのような価値は一般的に認められておらず，保存のため扇の骨を取って平面画として鑑賞される傾向にある.

そこで，扇と骨が一体となって初めてその作者の意図した扇の表面画像が鑑賞できることを視覚的に確認できるようにするため，筆者らは扇骨の長さ等のパラメータを自由に変えてデジタル上で検討できるシステムを構築すべく，扇のデジタルモデルを提案しこれを可視化するプログラムを作成した. 扇絵は扇骨で固定することによってたわんだ面になるのであるが，その面を平面の近似式で表現し，平面画である「扇面図から扇」及び「扇から扇面図」が算出できるものである.

今後は，このプログラムを江戸期等の伝統的な扇に適用すべく，投影法，扇の骨や形状についてさらに柔軟なパラメータの設定ができるシステムへと改良中である．また，写真や浮世絵等の平面画を扇に仕立てる際に検討すべき点などを洗い出し，日本の伝統的な扇の技を引き継ぎつつも新しい現代日本の扇の提案を試みる.

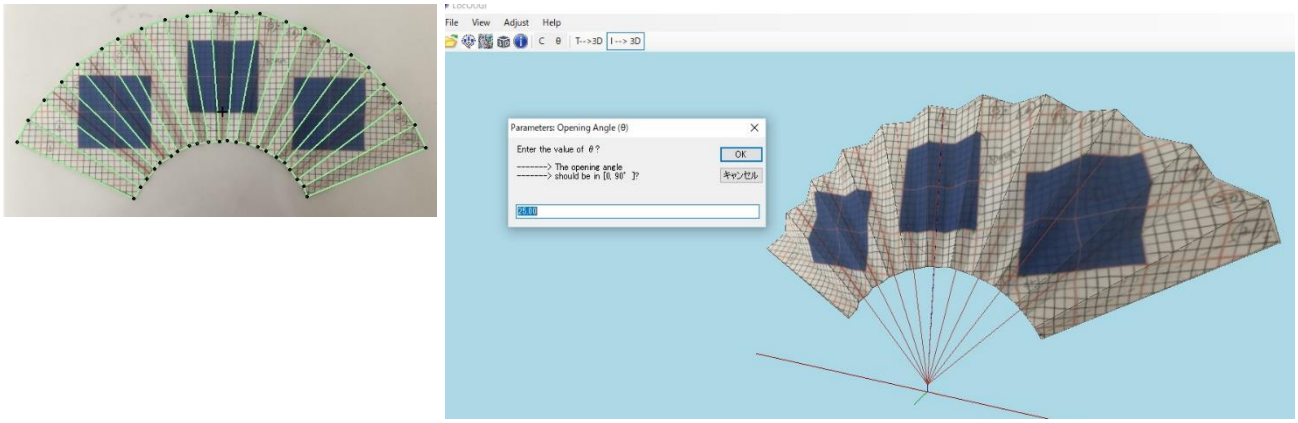
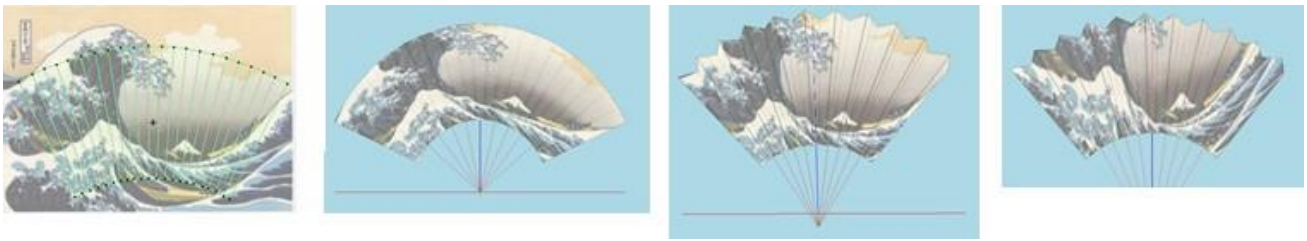


Fig.1　Left | The picture of the flat folding fan surface. Right | The three-dimensional view of the folding fan made from the flat photo image. The length of the bones and the opening angles can be changed, and it is possible to view from any viewpoints.



(a) Apply the template to the original painting

(b) Convert the picture into a flat fan surface that displays the desired image when it is made into a fan.

(c) The folding fan without distortion

(d) The folding fan with distortion

Fig.2 Example of the digital fan model application to the Ukiyo-e

折畳飲料容器の潰れ特性

明治大学　崎谷　明恵
萩原　一郎
明星大学　寺田　耕輔

近年，エコロジー，サスティナブル，エシカルなどが叫ばれている．そのためアルミ製のビール缶なども折畳めることが期待されるがこれまで得られていない．ここで反転螺旋折り紙構造など折り紙構造の折畳み特性の利用が考えられる．これに近いものとして吉村パターンを利用したダイヤモンドカット缶がある．アルミの場合，線を深くすることは耐久性に影響があるため吉村パターンを示す線は非常に浅いものでありこのままでは折り畳むことはできず，更に凹凸が逆であり，爪などで折れ線を凹ませる必要がある．

そこで本研究では，まず現行のダイヤモンドカット缶を軸方向に押し潰すのにどれだけの荷重が必要か，実験（図１，図２）とシミュレーションで行い通常缶と共に確認する（図３，図４）．そして今後の新しい折り畳み可能な缶を提案し（図５），シミュレーションを行い（図６），考察する．

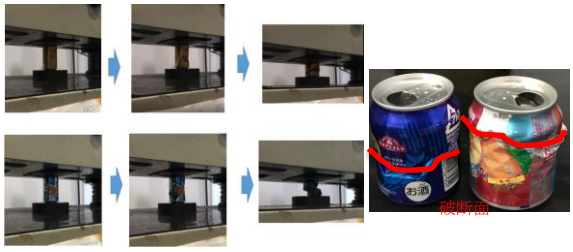


図 1 実験過程と実験後の缶の様子

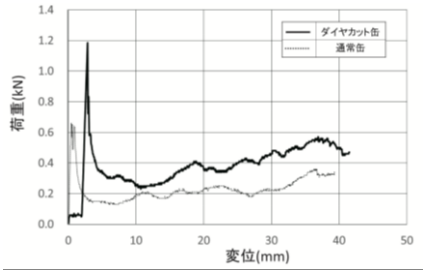
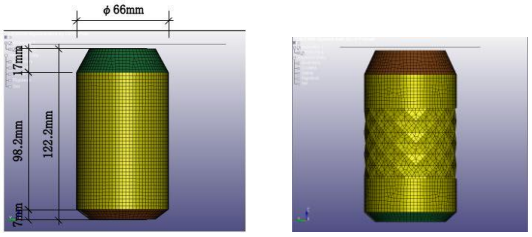


図 2 缶の軸圧潰実験で得られた荷重と変位



通常缶（節点 7157,要素数 7084）　ダイヤカット缶（節点 7157,要素数 7084）

図 3 通常缶とダイヤカット缶の 3D モデル

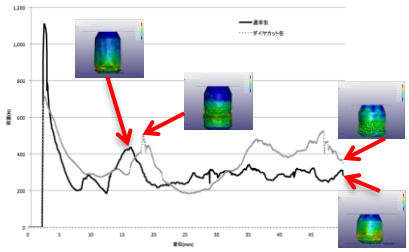
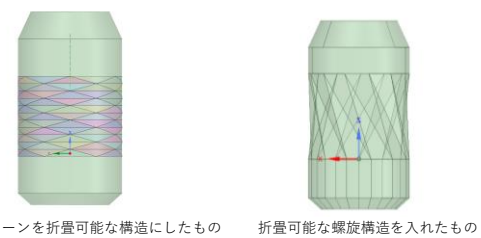


図 4 通常缶とダイヤカット缶の軸圧潰荷重と変位



吉村パターンを折畳可能な構造にしたもの　折畳可能な螺旋構造を入れたもの

図 5 折畳み可能な構造を入れた缶の 3D モデル

図 6 折畳缶の軸圧潰荷重と変位

新しいトポロジー最適化手法の開発と
それを利用した安全折紙輸送箱の開発

○佐々木　淑恵（明治大学）　萩原　一郎（明治大学）
Toshie Sasaki　　Ichiro Hagiwara

いちごなどの青果物，細胞，血液が輸送中に傷む要因に傷みやすい振動周波数帯域があるものと推定され，その振動周波数帯域を避けるように，輸送箱の固有周波数を移動することが求められている．しかし，複数の固有周波数を制御することは，従来の手法では困難な課題である．ここでは，穴を設けるだけで固有周波数を制御する高精度高効率の位相最適化技術として，エネルギー密度位相最適化法を提唱する．各固有モードのマスの部分とバネの部分をそれぞれ運動エネルギー密度分布，ひずみエネルギー密度分布から抽出し，固有周波数を上げる場合にはマス部に穴，下げる場合にはバネ部に穴を設けることで，固有周波数を制御する．

この基本検討のため，段ボール平板でこの危険周波数帯域から共振周波数を移動する問題を取り上げる．無拘束条件で固有値解析を行い，エネルギー密度分布を計算すると図１が得られる．8Hz から 20Hz までを危険周波数帯域とし，7 次，8 次の共振周波数を 8Hz 以下に，9 次，10 次は，20Hz 以上にすることを目指し提唱する手法で検討したところ，定評ある位相最適化を用いても得られなかった所望の結果が，　10 分ほどで得られた．

図２に示すように ATCP(Assembly Truss Core Panel)と称し，正四面体や正八面体ハーフコアを空間充填構造にアッセンブリすることにより優れた輸送箱になる可能性を示してきたが，さらに，ATCP における固有周波数をエネルギー密度位相最適化法により制御することで，具体的に安全折紙輸送箱の実現を目指す．

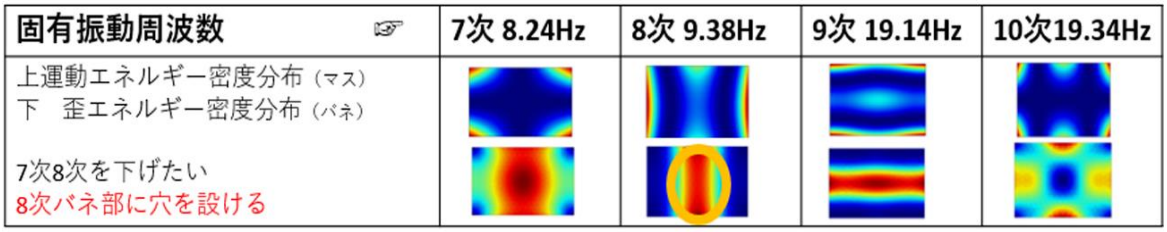


図１　段ボール平板の固有周波数とエネルギー密度分布

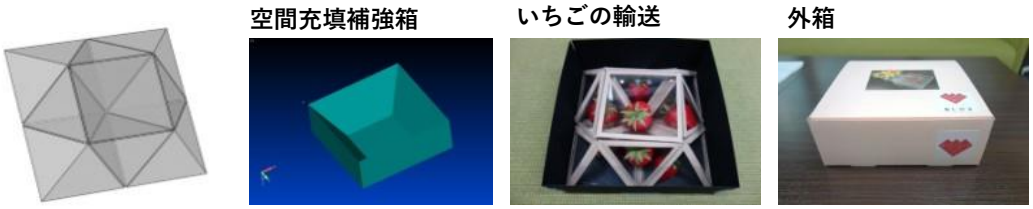


図２　いちごの輸送箱（ATCP）

反転振り折紙構造のエネルギー吸収特性

阿部綾，楊陽，萩原一郎（明治大学）

反転振り折紙構造(*RTO*)では 1 段の長さをいくらにするかが問題となる。当初、断面や長さが同じ真直材の軸圧壊時の座屈モードの半波長長さを 1 段の長さにするのが適切と考えられていた。シミュレーションで振り角 5 度の鋼材製 RTO の特性を調べた表 1 を見ると、半波長で見た場合は①の全長 544.5㎜ では②の 6 段、④の全長 1000㎜ では⑤の 10 段となるが、いずれもそれより段数が多い③、⑥の方が初期ピーク荷重値は低くエネルギー吸収量も多くより優れた特性を示している。⑧、⑨は外側 1.2㎜, 内側 0.5㎜ の真直材で、両者を結合するフォーム材を⑧は全長分、⑨は下端から半分の高さまで注入した場合。⑦の全長 644.5㎜ 単独の真直材に比し、重量は 7 割弱で⑧はエネルギー吸収量 2 倍、⑨は 1.2 倍でしかもピーク荷重値も下がっている。④、⑦の真直材単独では解析では折れ曲ったのでエネルギー吸収量は 2 ケース記している。最初の数字が解析値で後の数値は理想的に潰れた場合の換算値である。真直材単独では既に全長 644.5㎜ で不安定であるが、RTO やフォーム材注入時は真直材でも全長 1000㎜ でも安定している。我々は各段の長さ一様としていたが、その効果は未定としながらも各段の長さも変えて検討されている例がある。このように各段の非一様な長さの組合せ、フォーム材の特性や量を考慮すると適切な最適化手法が必要となる。*MPOD* の一例を図 1 に示す。同図(a)はモデルで自動車エネルギー吸収材を模擬した真直材、エネルギー吸収量を増加するため、どこに補強を与えればよいかという問題である。同図(b)はその結果で、尖った線は有限要素法による結果である。滑らかな曲線は、*MPOD* による結果で、尖った線を追い求めるのではなく最適値だけ少ない試行点で得られることを示している。第 1 段階で、全体領域から最適値が最も存在しそうな(*Most Probable*)領域を見つけ、第 2 段階はその可能性の高いところを集中的に探索し応答曲面の近似を高める 2 段階で最適値を求める方法である。ここでは、図 2 に示すフォーム材を介しての二重構造を例に、外側の RTO を固定し、内側の中空角柱構造の断面と寸法及びフォーム材の特性をパラメータとし、最大エネルギー吸収量を第 1 固有周波数最大であるとみなした検討例を述べる（図 3）。

表 1 RTO、真直材、フォーム材入り真直材二重構造特性比較

①～⑦の板厚:2.3[mm] ⑧～⑨の外側板厚:1.2[mm],内側板厚:0.5[mm]	重量 [kg]	初期荷重[kN]	エネルギー吸収量 [e+7Nmm]
① **544.5**mm-真直材	3.57	193	2.9(変形量400mm)
② **544.5**mm-RTO-振り角度5度-6段	3.57	178	2.4(変形量440mm)
③ **544.5**mm-RTO-振り角度5度-:9段	3.54	115	2.6(変形量440mm)
④ **1000**mm-真直材	6.6	191	3.15(変形量390mm) 4.5(変形量730mm)
⑤ **1000**mm--RTO-振り角度5度-*h*:90.75mm-N:10段	6.6	107	4.37(変形量790mm)
⑥ **1000**mm--RTO-振り角度5度-*h*:60.5mm-N:16段	6.49	109	4.93(変形量790mm)
⑦ **644.5**mm-真直材	4.3	193	2.72(変形量330mm) 3.36(変形量450mm)
⑧ **644.5**mm-真直材(外) +真直材(内)+foam(100%)	2.9	206	6.9(変形量450mm)
⑨ **644.5**mm-真直材(外) +真直材(内)+foam(50%)	2.9	173	4.2(変形量450mm)

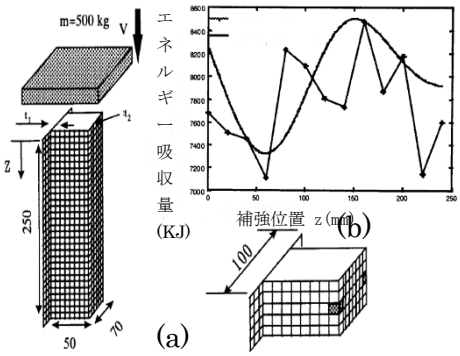


図 1　MPOD の例[1]

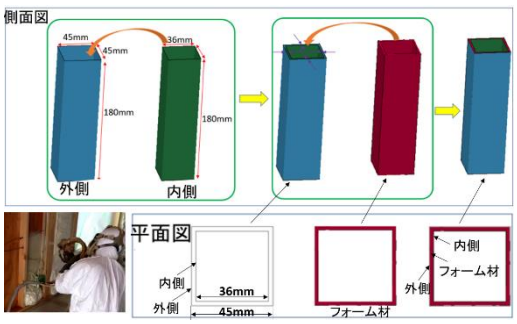


図 2　フォーム材で結合される二重構造例

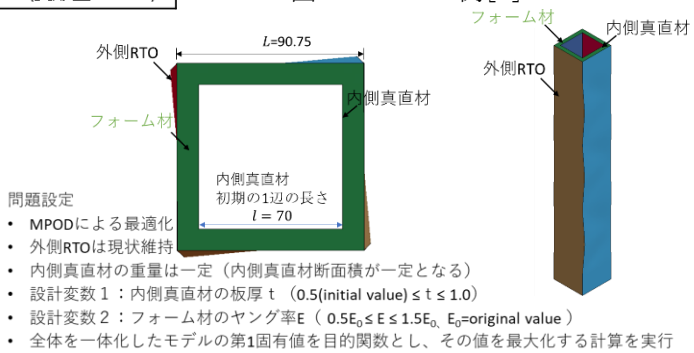


図 3　RTO＋フォーム材＋中空角柱構造の検討例

[1]Hagiwara,I., Global Optimization Method to Multiple Local Optimals with the Surface Approximation Methodology and Its Application for Industry Problems [Online First], DOI: 10.5772/intechopen.98907.(2021-9), pp.1-41.

曲線折りに関する最近の研究の紹介

筑波大学 システム情報系　三谷純

本発表では、筆者の運営する研究室で取り組んでいる、曲線折りを含む可展面の形状モデリングに関する研究について紹介する。曲線折りを(a)「平面曲線での折り」と(b)「空間曲線での折り」に分類すると、(a)を含む形状は可展面の一部を平面で鏡映変換するという簡単な操作で直感的なモデリングができる一方、(b)を含む形状のモデリングは極めて困難である。その主な理由として、展開状態での折り線曲線（2D）と、折った後に現れる折り線曲線（3D）を指定するものとした場合に、この入力から一意に定まる ruling の配置において ruling 同士の交差が頻出し、この交差を含まないような折り線曲線の決定が難しいことが挙げられる。また、最適化手法などで ruling の交差を回避したとしても、結果として得られる可展面の形状を予測することが難しく、意図した形状を得ることは難しいという問題もある。

これまでに、筆者らは折り線曲線を含む展開図を三角形分割し、折ったあとの形状を物理シミュレーションで得ることを行った（図 1）[1]。入力が展開図と折り線の折り角度だけで済むという利点があるが、得られる形状は三角形分割に依存すること、微小な伸縮を許容するため近似精度が高くないこと、および、折り角度の指定は意図した形状を得るうえで直感的に指定しにくいこと、などの欠点もある。

そこで上記とは異なるアプローチとして、3DCAD ソフトウェアである Rhinoceros 上で、より直感的な操作で形状モデリングを行う研究に取り組んでいる。具体的には、折った後に現れる折り線曲線C_{3D}と、曲面上に乗る曲線（補助曲線C'_{3D}）を用いる。C_{3D}およびC'_{3D}間に暫定的な ruling を張り、その後、可展性を維持するように補正を行う。このようにすることで、ruling の交差を抑制しつつ、直感的な形状モデリングを行うことが可能となり、図 2 に示すような形状を短時間に生成することができた。

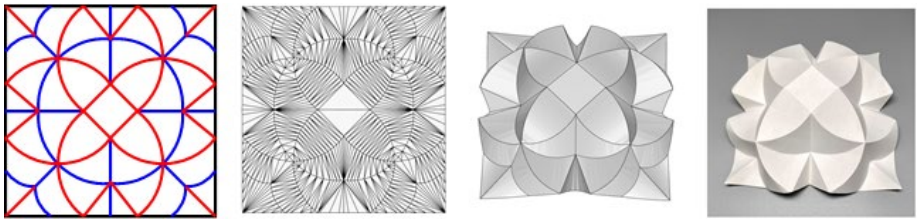


図 1 左から順に展開図、三角形分割、シミュレーション結果、紙を実際に折った様子（写真）

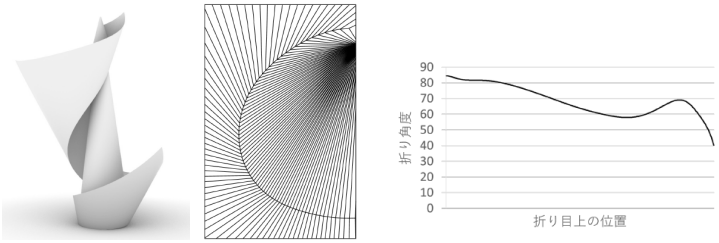


図 2 左から順にモデリング結果、展開図と ruling の配置、折り線上の角度を表すグラフ

参考文献

[1] Kosuke Sasaki, and Jun Mitani, "Simple Simulation of Curved Folds Based on Ruling-aware Triangulation", In Proc. of Pacific Graphics Short Papers, Posters, and Work-in-Progress Papers, The Eurographics Association, 2020.

折紙タイヤプロジェクト 2019 とその後

Origami Tire Project 2019 and Thereafter

石田祥子 Sachiko ISHIDA
明治大学理工学部機械工学科
Dept. of Mechanical Engineering, School of Science and Technology, Meiji University

著者らは円筒状のハニカムコアを設計し，タイヤや軸受のような回転機械への応用に取り組んでいる[1, 2]. 本講演では, 円筒ハニカムコアを乗用車タイヤと同じ寸法で 4 つ製作し，車に取り付け実車試験を行った「折紙タイヤプロジェクト 2019」の成果と，その後のハニカムコアに関する取り組みについて紹介する.

円筒ハニカムコアは環状のシート材を波状に折って接着, 積層を繰り返して成形する. 平板ハニカムコアの一般的な製造法であるコルゲート法を踏襲しているため，将来的には大量生産にも対応できる. 折紙タイヤプロジェクトでは, タイヤの素材は汎用的な紙のため 1t を超える車重を支えるのは大きなチャレンジだったが，コア寸法の調整や荷重に耐えるための工夫を行い，発車，直進，停車に成功した[3]. プロジェクトの様子は，NHK BS プレミアム[4]にて放送された. 実車試験では日本工学院八王子専門学校の協力を得た.

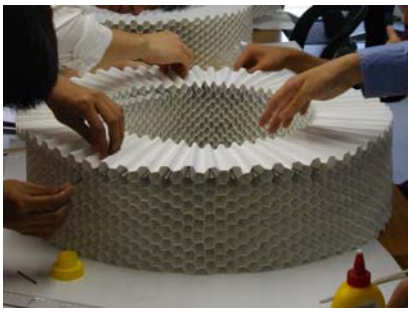


Fig.1 Fabrication of honeycomb tires

Fig.2 On-vehicle test of honeycomb tires

参考文献

[1] S. Ishida, Design of Cylindrical Honeycomb Cores – Geometric Consideration –, Mechanical Engineering Journal, Vol. 5, No. 4 (2018), No. 18-00147.

[2] S. Ishida, et al., Numerical analysis on rigidity of cylindrical honeycomb cores under radial loads, Journal of Advanced Simulation in Science and Engineering, Vol. 7, No. 1 (2020), pp. 189-200.

[3] 山口航矢，et al.，折紙タイヤの設計と実車試験，日本機械学会 第 31 回設計工学・システム部門講演会，No. 2502，オンライン，2021 年 9 月 15～17 日

[4] NHK BS プレミアム，本気でイグ・ノーベル賞狙います！，2019 年 6 月 29 日 22:30～23:30 放送

ハサミムシの扇子の工学応用

斉藤一哉（九州大学大学院芸術工学研究院）
k-saito@design.kyushu-u.ac.jp

昆虫の翅にみられる巧妙な折り畳みは，非常にコンパクトでありながら一瞬で収納・展開が可能な究極の展開構造であり，様々な工学応用が期待されている．中でもハサミムシの翅は，展開状態の 1/15 程度と昆虫の中で最もコンパクトに折り畳み可能であることに加え，広げた状態の形を維持する特殊なスプリング機構など興味深い機能が多数報告されている．この折り畳みはバッタやカマキリの翅や扇子と同様に放射状のフレームに支えられているが，フレームの中央部にヒンジ構造があり，閉じた扇子を更に真ん中で折り畳むことでコンパクトな折り畳みを実現する．本講演では，著者らが 2020 年に発表したハサミムシの扇子の設計法[1]をベースに実用化を進めている展開構造のプロトタイプに関して紹介する．現在，ハサミムシ扇子型展開構造における Thickness Accommodation に関する検討を行っており(図 2)．これを基にした軽トラック屋台用の展開屋根のプロトタイプが製作されている．また，非可展な頂点を導入することで，扇子をドーム形状にした発展モデルとそのデザインツールに関して紹介する(図 3)．

[1] K. Saito, et al.: Earwig fan designing: Biomimetic and evolutionary biology applications, *Proceedings of the National Academy of Sciences,* 117(2020), 17622-17626.

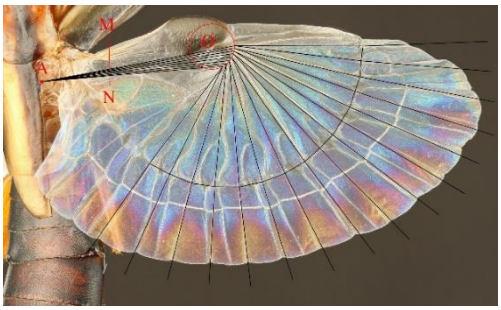


図 1　ハサミムシの扇子の展開図設計法

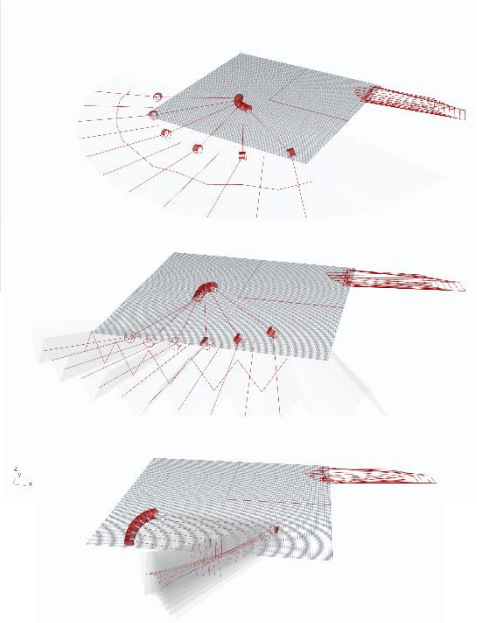


図 2　折り畳みシミュレーションを利用したフレームの設計

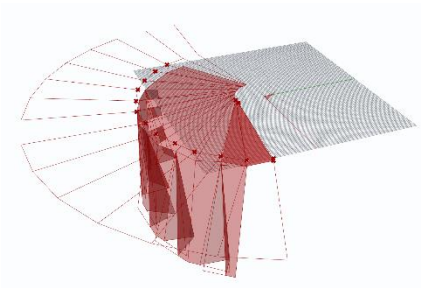


図 3　ハサミムシ型ドーム構造の設計

なまこ折りの力学系

今田　凜輝（東京大学），舘　知宏（東京大学）

モジュールと呼ばれる折り線パターンの繰り返しからなる折紙テセレーションは、 折り線パターンの周期性からは非自明な挙動を示しうることがある。Waterbomb Tessellation を丸めて得られる“なまこ折り”は、図に示すような波状曲面を形成することが知られていたが、そのような現象が生じる理由は未解明であった。

なまこ折りには、いくつかの仮定をすると、あるモジュールの状態から隣接するモジュールの状態が連鎖的に定まるという特徴がある。これにより、なまこ折りは端部のモジュール状態で全体形状が定まる 2 自由度機構となり、その位相と振幅を独立に制御できる。本研究では、モジュール間の関係を支配する 2 次元非線形離散力学系を幾何的に導き、この系の解析を通してなまこ折りの数理解明を目指している。本発表では、安定性・分岐解析の応用によって得られた、なまこ折りによる波状曲面の数理構造や、系の挙動の展開図依存性等について述べる。

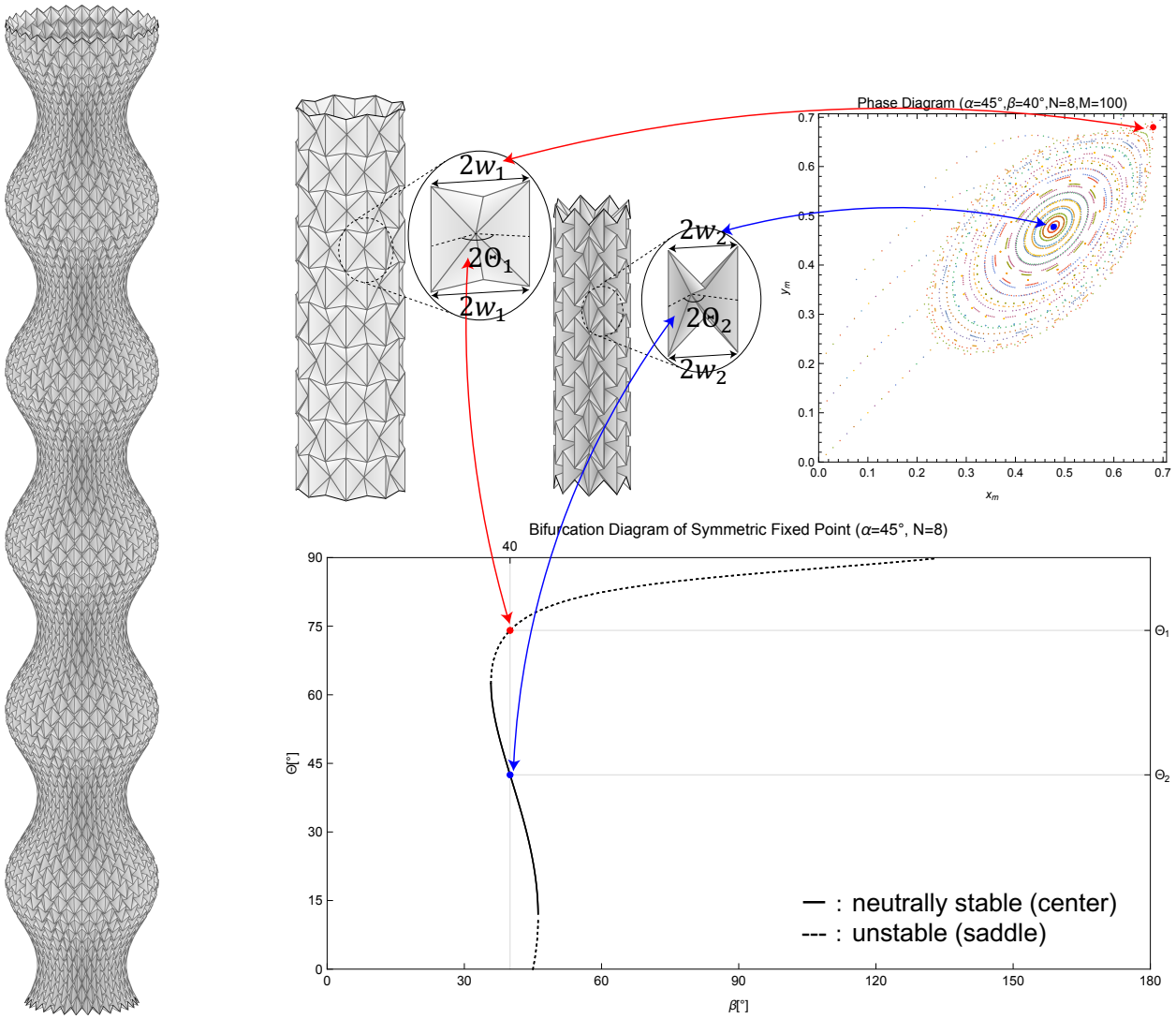


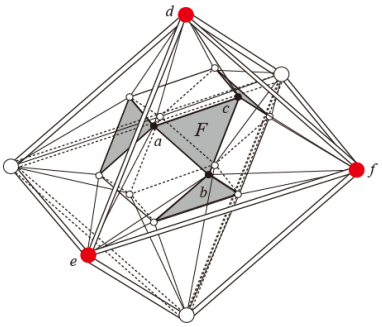
図. (左)なまこ折りによる波状曲面、(右)安定性・分岐解析による結果例

正24胞体の折りたたみとオクタバグ

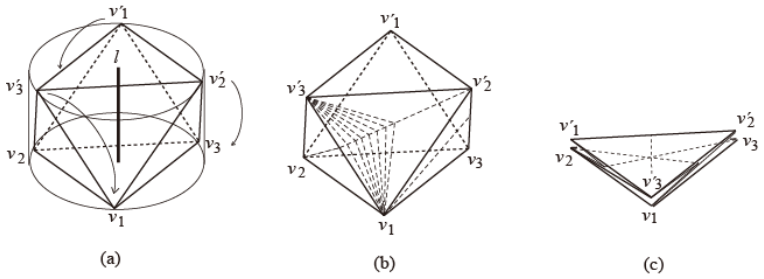
奈良 知惠 （明治大学先端数理科学インスティテュート，cnara@jeans.ocn.ne.jp）

３次元の正多面体は５種類であることはよく知られ，中高生の教材でも見かける．それに対して，４次元の正多面（胞）体は３次元に生活する我々にとって，イメージしづらいのであまり扱われていないが 6 種類である．ちなみに，４次元折り紙では，４次元に実現された３次元の胞からなる立体を３次元立体に折りたたむことが一般的のようである [1]．ここでは，４次元のある種の折り紙として，４次元の中で構成された２次元面の集合としての立体を連続的に平坦折りすることを考える．建築家として有名なバックミンスター・フラーが考案したと言われているジターバグ（オクタバグとも呼ばれる）の動きを紹介し，それが 4 次元正多胞体の１つである正２４胞体の２次元面の集合（２次元スケルトン）を連続的に平坦に折りたたむ方法と関連が深いことを述べる (詳細は[3, 4]参照)．

４次元の６種類の正多胞体については多様なアプローチによって [2] に紹介され，その中で特に注目されるのが正２４胞体である．対称性が高く，すべての次元の正多面体の中で，正単体以外で唯一の自己双対の正多面体である．正２４胞体は２４個の正八面体が連結したもので (図左)，その面集合は９６個の正三角形からなり，その一部がジターバグ（オクタバグ）の８個の正三角形面と同じ構造をもつ (図左の中央部分)．本講演では，ジターバグ（オクタバグ）の動きと正２４胞体を関連付けながら，４次元空間の中での 2 次元面の折りたたみの例を紹介する．そこで基本となるのは，次の右図に示すような正八面体の表面の連続的平坦化である．



左図：正２４胞体の一部 [3]



右図：正八面体の連続的平坦化([5]より転載)

参考文献

[1] 海野啓明，矢島邦昭，佐藤大輔 (2001)，『4 次元折り紙とそのCG 表現』，グラフィックスとCAD IPSJ-CG010417. https://www.jstage.jst.go.jp/article/wiieej/04-04/0/04-04_0_27/_article/-char/ja/

[2] 特集「高次元の正多面体」，数学セミナー，69 no.9, 7-48 日本評論社.

[3] 奈良知惠 (2021)，正 24 胞体とオクタバグ，数学セミナー，69 no.9, 44-48，日本評論社.

[4] J. Itoh, C. Nara (2021), Continuous Flattening of the 2-Skeleton of a regular 24-cell, *J. Geometry* 112 no. 1. Paper No. 13 15pp. https://doi.org/10.1007/s00022-021-00575-6.

[5] J. Itoh and C. Nara (2019). Continuous Flattening of the 2-Skeletons in Regular Simplexes and Cross-Polytopes, *J. Geometry* 110, no. 3, Paper No. 47 12pp.