三角形二面体の最小跡と等角共役点

山岸 義和 (龍谷大学)

2020 年 12 月 3 日 (木)-4 日 (金) ＭＩＭＳ現象数理学拠点共同研究集会 (Zoom 会議)
「折り紙の科学を基盤とするアート・数理および折紙工学への応用研究」

$T = \triangle\mathrm{ABC}$ を三角形とし、これと合同な三角形 $T' = \triangle\mathrm{A'B'C'}$ を用意する。三角形二面体 $D = D(T)$ とは、T の周と T' の周を同一視して得られる封筒のような形である。T を表面、T' を裏面と呼ぶ。表面の一点 P に蟻 (アリ) がいて、裏面まで歩いて行くとき、一番遠い点はどこか、という問題を考える (小谷の蟻の問題)。

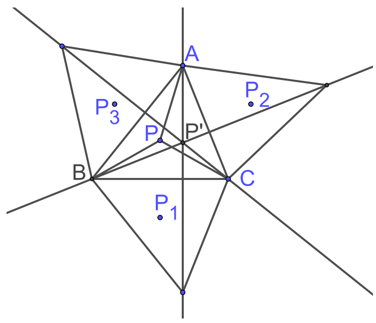
表面の点 P を固定する。P から裏面の点 Q への最短経路は、辺上のある点 N を用いて、線分 PN と線分 NQ の和集合として表される。点 N は、辺 AB, BC, CA のいずれかの上にある。(固定点 P からの) 最短経路を 2 つ以上もつような点 Q が存在する。そのような点 Q 全体のなす集合の閉包を、点 P に関する最小跡 (cut locus) と呼ぶ。

三角形 $T = \triangle\mathrm{ABC}$ を平面上に置き、辺 BC に関して点 P と線対称な位置にある点を P_1, 辺 CA に関して点 P と線対称な位置にある点を P_2, 辺 AB に関して点 P と線対称な位置にある点を P_3 とおく。三角形 $\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の外心を P^* とおく。線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の垂直二等分線は頂点 C を通り、線分 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の垂直二等分線は頂点 A を通り、線分 $\mathrm{P}_3\mathrm{P}_1$ の垂直二等分線は頂点 B を通る。この三つの垂直二等分線は、一点 P^* で交わる。P に関する最小跡は、線分 $\mathrm{P}^*\mathrm{A}$ と $\mathrm{P}^*\mathrm{B}$ と $\mathrm{P}^*\mathrm{C}$ の和集合である。

Lemma 1. 次が成立つ。

$$\begin{aligned} \angle\mathrm{PBA} &= \angle\mathrm{P^*BC}, \\ \angle\mathrm{PCB} &= \angle\mathrm{P^*CA}, \\ \angle\mathrm{PAC} &= \angle\mathrm{P^*AB}. \end{aligned} \tag{1}$$

P^* は、三角形 T に関する P の等角共役点 (isogonal conjugate) と呼ばれる。このように、最小跡



を考えることによって等角共役点が自然に定義される。

Corollary 2. 三角形 T 上の点 P に対して、等角共役点 P^* は一意に存在する。

三角形二面体 $D = D(T)$ 上で、点 P から一番遠い点を最遠点と呼ぶことにする。P の最遠点は、P^*, A, B, C のいずれかである。

Theorem 3. 三角形 $T = \triangle\mathrm{ABC}$ 上の二面体 $D = D(T)$ 上の点 P の等角共役点を P^* とするとき、以下は互いに同値である。

1. P^* は P の最遠点である。
2. 三つの頂点 A, B, C はすべて P の最遠点である。
3. P は T の外心である。
4. P^* は T の垂心である。

このいずれか *(したがってすべて)* が成立つとき、T は鋭角三角形あるいは直角三角形である。

(北原百華 (2020 年 龍谷大学卒業) との共同研究)